

**Кафедра інформаційних систем та технологій**

# **Математичний аналіз**

*Завдання і методичні рекомендації щодо виконання  
контрольних робіт для здобувачів вищої освіти  
за освітньо-професійною програмою «Інформаційні  
управляючі системи» спеціальності 126 «Інформаційні  
системи та технології» галузі знань 12 «Інформаційні  
технології», освітній ступінь Бакалавр, заочної форми  
навчання*

Завдання та методичні рекомендації для виконання контрольних робіт із дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів вищої освіти за освітньо-професійною програмою «Інформаційні управляючі системи» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» підготувала доцент кафедри інформаційних систем та технологій к.т.н., О.Б. Одарущенко.

Рецензент: доцент кафедри інформаційних систем та технологій к.т.н., с.н.с. Поночовний Ю.Л.

Розглянуто на засіданні кафедри інформаційних систем та технологій

Протокол №4 від 22.10.2020

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою зі спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»

Протокол №2 від 22.10.2019

Голова науково-методичної ради спеціальності  
126 «Інформаційні системи  
та технології»

\_\_\_\_\_ Копішинська О.П.

© О.Б. Одарущенко, 2019

© ПДАА, 2019

# ЗМІСТ

## ВСТУП

<b>Розділ 1. Методичні вказівки щодо виконання контрольної роботи.....</b>	<b>4</b>
1.1. Загальні положення.....	7
1.2. Вимоги до оформлення контрольної роботи.....	7
1.3. Принцип обрання варіанту контрольної роботи.....	7
<b>Розділ 2. Перелік варіантів контрольної роботи.....</b>	<b>8</b>
2.1. Варіанти завдань для індивідуального виконання в контрольній роботі.....	8
2.1. Приклад виконання завдання.....	27
<b>Розділ 3. Критерії та шкала оцінювання контрольної роботи та порядок захисту.....</b>	<b>37</b>
3.1. Критерії та шкала оцінювання.....	37
3.2. Порядок захисту.....	37
<b>Рекомендована література.....</b>	<b>38</b>
<b>Додаток 1.....</b>	<b>40</b>

## **ВСТУП**

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є: оволодіння сучасними математичними методами, теоретичними положеннями та основними способами застосування методів математичного аналізу в професійній діяльності.

**Основними завданнями** навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є: ознайомлення здобувачів вищої освіти з основами теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох мінних, з теорією диференціальних рівнянь, теорією рядів; формування навиків розв'язування практичних задач; прищеплення умінь самостійно вивчати навчальну літературу. Підготувати необхідний рівень знань для успішного засвоєння курсів, що спираються на знання основ математичного аналізу, таких як теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси; теорія інформації та кодування; чисельні методи; теорія прийняття рішень.

При вивченні дисципліни здобувачі вищої освіти мають набути загальні та професійні **компетентності**.

### *1. Загальні компетентності:*

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність до розуміння предметної області та професійної діяльності;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

### *2. Фахові компетентності:*

- здатність до аналізу, синтезу і оптимізації інформаційних систем та технологій з використанням математичних моделей і методів;
- здатність проводити обчислювальні експерименти, порівнювати результати експериментальних даних і отриманих рішень.

### *3. Програмні результати навчання:*

- знання лінійної та векторної алгебри, диференційного та інтегрального числення, теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів, диференціальних рівнянь для функцій однієї та багатьох змінних, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики в обсязі, необхідному для розробки та використання інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації.

## **Зміст дисципліни розкривається в темах:**

### **Тема 1. Вступ до математичного аналізу.**

Поняття функції. Способи задання. Класифікація функцій. Основні елементарні функції та їх графіки. Побудова графіків функцій методом зсуву та деформації. Нескінченно малі і нескінченно великі величини. Їх властивості.

Границя функції. Основні властивості границь. Перша і друга чудові границі. Число “ $e$ ”. Натуральні логарифми. Порівняння нескінченно малих.

Односторонні границі. Неперервність функції в точці (без доведення). Розриви функцій, їх класифікація. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

### **Тема 2. Диференціальне числення функції однієї змінної.**

Поняття похідної. Задачі, що приводять до поняття похідної. Механічний і геометричний зміст похідної. Поняття складної функції. Похідна складної функції.

Поняття оберненої функції. Похідна оберненої функції. Похідна функції, заданої параметрично.

Логарифмічне диференціювання. Похідна функції, заданої неявно. Таблиця похідних. Диференціал функції, як головна частина її приросту. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.

### **Тема 3. Дослідження функції за допомогою похідної.**

Правила Лопіталя. Розкриття “невизначеностей” за допомогою правил Лопіталя. Ознаки монотонності функції. Поняття екстремуму. Необхідна та достатня умови існування екстремуму. Знаходження найменшого і найбільшого значень функцій на відрізку

Опуклість та увігнутість кривої. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Повне дослідження функції.

### **Тема 4. Невизначений інтеграл.**

Первісна функції та невизначений інтеграл. Таблиця інтегралів. Властивості невизначених інтегралів. Метод безпосереднього інтегрування.

Метод інтегрування заміною змінної. Метод інтегрування частинами. Інтегрування дробів вигляду  $\frac{A}{x-a}$ . Інтегрування дробів вигляду  $\frac{A}{(x-a)^k}$ .

Інтегрування дробів вигляду  $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ . Теорема про розкладання раціональних дробів на найпростіші дроби. Метод невизначених коефіцієнтів.

Приклади інтегрування раціональних дробів.

Інтеграл вигляду:  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . Інтеграл вигляду:  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .

Інтеграл вигляду:  $\int \sin mx \sin nxdx$ ,  $\int \sin mx \cos nxdx$ ,  $\int \cos mx \cos nxdx$ .

### **Тема 5. Визначений інтеграл.**

Поняття визначеного інтеграла як границі інтегральної суми. Найпростіші властивості визначеного інтеграла. Похідна від інтеграла із змінною верхню межею.

Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування заміною змінної. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Обчислення площ у декартових координатах. Обчислення площ у полярних координатах. Невласні інтегралі.

### **Тема 6. Звичайні диференціальні рівняння.**

Історична довідка. Задачі, що приводять до теорії диференціальних рівнянь. Поняття диференціального рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття.

Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

### **Тема 7. Однорідні лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.**

Однорідні лінійні диференціальні рівняння (ОЛДР) зі сталими коефіцієнтами. Основні поняття. Лінійна залежність і незалежність функцій. Ознака лінійної залежності двох функцій.

Структура загального розв'язку ОЛДР. Теорема про частинний розв'язок. Загальний розв'язок ОЛДР в залежності від коренів характеристичного рівняння.

### **Тема 8. Числові та функціональні ряди.**

Знакосталі ряди. Ознаки збіжності. Основні означення. Класичні числові ряди: ряд геометричної прогресії; гармонійний ряд; узагальнений гармонійний ряд. Основні властивості збіжних рядів. Необхідна ознака збіжності рядів. Ознаки порівняння рядів. Ознака д'Аламбера. Ознака Коші. Інтегральна ознака (без доведення).

Поняття знакопочередного ряду. Ознака Лейбніца. Абсолютна та умовна збіжність. Поняття функціонального ряду. Область збіжності. Степеневі ряди. Область збіжності степеневих рядів. Ряди Тейлора. Ряди Маклорена для деяких функцій. Застосування степеневих рядів.

## **Розділ 1. Методичні вказівки щодо виконання контрольної роботи**

### **1.1. Загальні положення**

Навчальним планом для здобувачів вищої освіти за освітньо-професійною програмою «Інформаційні управляючі системи» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» заочної форми навчання передбачено в курсі «Математичний аналіз» виконання комплексної контрольної роботи з усіх названих тем.

Контрольна робота складається з практичних завдань, які оформлюються у вигляді реферату, який подається на кафедру для перевірки як у друкованому, так і в електронному вигляді. Перед викладенням матеріалу відповіді вказується номер завдання та наводиться його повне формулювання.

### **1.2. Вимоги до оформлення контрольної роботи**

Контрольну роботу **друкують** на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм). Титульний аркуш є типовим і містить повну інформацію про дисципліну та студента (див. Додаток 1). Текст розміщують на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально. При цьому залишають такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 10 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм. Робота виконується у друкованому вигляді (при використанні текстового редактора MS Word розмір шрифту 14, міжрядковий інтервал – полуторний). Графіки, діаграми, малюнки виконуються в будь-якому графічному редакторі і вставляються в текст як об'єкти або з файлів.

У кінці роботи має бути наведений список використаної літератури, оформлений згідно вимог бюлетеня ВАК України за 2009 р.

### **1.3. Принцип обрання варіанту контрольної роботи**

Варіанти завдань обираються згідно порядкового номера прізвища студента в журналі навчальної групи.

## Розділ 2. Перелік варіантів контрольної роботи

### 2.1. Варіанти завдань для індивідуального виконання в контрольній роботі

Завдання 1. Обчислити границі:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x + 1}{-4x^2 - 9x + 1}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 14}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x - 2} - 2}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x + 3}{4x + 5} \right)^{3x - 2}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 2}{-5x^2 - 10x + 3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 11x + 28}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{x - 2} - 5}{x - 27}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-4 - 2x}{5 - 2x} \right)^{-3x - 1}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 + 4x + 3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 7x + 10}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - 4x}{2 - 4x} \right)^{3x - 4}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 8x + 3}{2x^2 + x + 2}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 10x + 24}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 18} \frac{x - 18}{\sqrt{x - 2} - 4}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 4}{3x - 3} \right)^{6x - 1}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 8x + 5}{-4x^2 - 9x + 1}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x - 1} - 3}{x - 10}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-5 - 3x}{1 - 3x} \right)^{4x + 5}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 1}{-3x^2 - 8x + 4}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 10x + 21}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 26} \frac{x - 26}{\sqrt{x - 1} - 5}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-4x - 5}{1 - 5x} \right)^{-2x + 3}$

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 4x + 5}{6x^2 + 5x + 6}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x - 15}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 11} \frac{x - 11}{\sqrt{x - 2} - 3}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - 6x}{-3 - 6x} \right)^{2x-5}$

8. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 5x + 6}{-x^2 - 6x + 5}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 24}$

9. в)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt{x - 4} - 2}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-5 - 8x}{3 - 8x} \right)^{x-4}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 4x + 7}{x^2 - 5x + 2}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9x + 8}$

11.

в)  $\lim_{x \rightarrow 18} \frac{\sqrt{x - 2} - 4}{x - 18}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x + 4}{9x - 1} \right)^{6x-2}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 7x + 2}{3x^2 + 2x - 1}$

13.

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16x}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 3x + 8}{7x^2 + 6x + 7}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 3x - 27}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{x - 17}{\sqrt{x - 1} - 4}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - 7x}{-3 - 7x} \right)^{-x+5}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 - 2x + 4}{8x^2 + 7x + 3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 8x + 7}$

10.

в)  $\lim_{x \rightarrow 26} \frac{\sqrt{x - 1} - 5}{x - 26}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - 9x}{-5 - 9x} \right)^{-6x+3}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - x + 1}{9x^2 + 8x - 1}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4}$

12.

в)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x - 5} - 2}{x - 9}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{8x + 1}{8x - 5} \right)^{-5x+1}$

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 3x - 5}{5x^2 - 6x - 4}$

14.

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9x + 18}$

$$15. \quad \text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 27} \frac{x - 27}{\sqrt{x - 2} - 5}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x + 3}{7x - 2} \right)^{5x - 2}$$

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 6x + 1}{4x^2 + 3x - 4}$$

$$\text{Б)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 15}$$

$$\text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x - 10}{\sqrt{x - 1} - 3}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x - 3}{5x + 4} \right)^{4x - 1}$$

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 3x - 2}$$

$$\text{Б)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x - 16}$$

$$17. \quad \text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 11} \frac{\sqrt{x - 2} - 3}{x - 11}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 2}{x - 1} \right)^{4x - 5}$$

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 6x - 3}{-2x^2 - 7x - 4}$$

$$\text{Б)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x - 21}$$

$$19. \quad \text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x - 12}{\sqrt{x - 3} - 3}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{5x - 4}$$

$$\text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 17} \frac{\sqrt{x - 1} - 4}{x - 17}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x - 1}{6x + 5} \right)^{-4x - 3}$$

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 8}{6x^2 + 7x - 7}$$

$$\text{Б)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 5x - 14}$$

$$\text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 38} \frac{\sqrt{x - 2} - 6}{x - 38}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x - 3}{4x + 5} \right)^{7x - 6}$$

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 2x - 3}{6x^2 + 5x - 2}$$

$$\text{Б)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9x + 20}$$

$$18. \quad \text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow 28} \frac{x - 28}{\sqrt{x - 3} - 5}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 3}{3x - 2} \right)^{6x - 7}$$

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 + x + 8}{7x^2 + 8x - 6}$$

$$\text{Б)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x - 10}$$

$$20. \quad \text{B)} \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{x + 8}$$

$$\text{Г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - 7x}{-3 - 7x} \right)^{3x - 2}$$

21. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x^2 - 4x + 9}{8x^2 + 9x - 4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 20}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 19} \frac{\sqrt{x-3} - 4}{x-19}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-6x}{-3-6x} \right)^{2x-3}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 4x - 3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x - 5}$

23.

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{2x+6}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5-4x}{-3-4x} \right)^{-6x+7}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - x + 7}{5x^2 + 6x - 6}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$

25.

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-2x}{-2-2x} \right)^{-4x+5}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 4x + 6}{4x^2 - 7x - 1}$

27.

б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 16}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 3}{-3x^2 - 8x + 4}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 12}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{2-x} - 1}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-2-5x}{1-5x} \right)^{x-1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + x - 7}{4x^2 - 5x - 8}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 6}$

24.

b)  $\lim_{x \rightarrow 38} \frac{x-38}{\sqrt{x-2} - 6}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-3x}{-4-3x} \right)^{-6x+7}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{7x^2 + 4x + 2}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x - 28}$

26.

b)  $\lim_{x \rightarrow 20} \frac{x-20}{\sqrt{x-4} - 4}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-x}{5-x} \right)^{-3x+4}$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 2}$

28.

б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 39} \frac{\sqrt{x-3} - 6}{x-39}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+5}{7x-2} \right)^{-2x+3}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 5x + 5}{-2x^2 - 3x + 1}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x - 12}$$

29.

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+2} \right)^{4x-5}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 6x + 4}{-x^2 - 2x + 4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 10x + 9}$$

31.

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-5} - 1}{x-6}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+5}{7x-2} \right)^{-2x+3}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - x + 5}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 11x + 24}$$

33.

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+4}{5x-5} \right)^{6x+2}$$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - 1}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+4}{2x-2} \right)^{3x-7}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x - 2}{-x^2 - 6x + 3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

30.

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-4} - 1}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+3}{4x-1} \right)^{5x-4}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{2x^2 - 7x + 6}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 10x + 16}$$

32.

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{x-6} - 1}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x-5}{6x+5} \right)^{-x-6}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 3}{3x^2 - 8x + 4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x - 10}$$

34.

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x+2}$$

$$\text{Г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-5}{3x+1} \right)^{-9x+2}$$

35.

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 8x - 1}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

в)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{x^2 + x - 6}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{4-2x} \right)^{8x+1}$

36.

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 7x + 3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 3x - 4}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-3-3x}{5-3x} \right)^{-8x+3}$

**Завдання 2.** Знайти похідні функцій.

1.	а)	$y = \operatorname{tg}^4 \sqrt{2x^2 + 1}$	2.	а)	$y = \ln^3 \sqrt{x^2 + 7x - 5}$
	б)	$y = x^6 \cdot 5^{\frac{x}{2}}$		б)	$y = x^3 \cdot 3^{\frac{x}{3}}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\cos^2 x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^4}}{\operatorname{ctg} \frac{x}{8}}$
	г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^{e^x}$		г)	$y = (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)^{\ln x}$
	г)	$\operatorname{tg}(x^2 + y) - y^3 = 0$		г)	$\cos(x^2 + y) - y^4 = 0$
3.	а)	$y = \sin^6 \sqrt{x^2 + 2x}$	4.	а)	$y = \log_2^2 \sqrt{2x^2 - 1}$
	б)	$y = x^6 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$		б)	$y = \ln x \cdot 3^{\frac{x}{2}}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{2^{3x}}$		в)	$y = \frac{\sqrt[6]{x}}{e^{\frac{x}{8}}}$
	г)	$y = (\sin x)^{\sin x}$		г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{2-x^2}$
	г)	$\sin(x + y^2) - y = 0$	г)	$\sin(x^2 + y^2) - y^2 = 0$	
5.	а)	$y = \cos^6 \sqrt{x^2 + 7}$	6.	а)	$y = \operatorname{tg}^5 \sqrt{x^2 + 9}$

	б)	$y = x^3 \cdot e^{5x}$		б)	$y = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\cos^2 x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\cos 3x}$
	г)	$y = (\sin x)^{\cos x}$		г)	$y = (\operatorname{arctg} x)^x$
	г)	$\operatorname{ctg}(x+y) - y^2 = 0$		г)	$\cos(x+y^2) - y^2 = 0$
7.	а)	$y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{8x-x^2}$	8.	а)	$y = 4^{\sqrt{\sin^2 3x-x}}$
	б)	$y = x^8 \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$		б)	$y = x^5 \sin^6 x$
	в)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^4}}{\operatorname{arctg} \frac{x}{6}}$		в)	$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\operatorname{ctg} \frac{x}{7}}$
	г)	$y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$		г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$
	г)	$\operatorname{ctg}(x^2 y^2) - y^4 = 0$		г)	$\cos(x^2 + y^2) - y = 0$
9.	а)	$y = \sin^6 \sqrt{x^2+6}$	10.	а)	$y = \operatorname{arcctg}^6 \sqrt{7x-6x^2}$
	б)	$y = x \cdot 4^{\frac{x}{4}}$		б)	$y = \ln x \sin 2x$
	в)	$y = \frac{\sqrt[6]{x}}{\arcsin 3x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\log_5 x}$
	г)	$y = x^{e^x}$		г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{\arccos x}$
	г)	$\operatorname{tg}(x+y^2) - y^3 = 0$		г)	$3^{x^3 y^2} - y^3 = 0$
11.	а)	$y = \operatorname{ctg}^5 \sqrt{x^2-8}$	12.	а)	$y = e^{\sqrt{\operatorname{tg}^2 3x-x^3}}$
	б)	$y = x^2 \cdot 3^{4x}$		б)	$y = x^6 \operatorname{arctg} 5x$
	в)	$y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sin 4x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[7]{x^2}}{\cos 2x}$
	г)	$y = (\operatorname{arctg} x)^{e^x}$		г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$

	г)	$3^{x^3y^3} - y^2 = 0$		г)	$3^{x^3y} - y^4 = 0$
13.	а)	$y = \cos^4 \sqrt{x^2 + 5}$	14.	а)	$y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{8x - 5x^2}$
	б)	$y = x^7 \sin 4x$		б)	$y = x^7 \cdot 2^{4x}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^4}}{\operatorname{arctg} \frac{x}{3}}$		в)	$y = \frac{\sqrt[7]{x^4}}{e^{\frac{x}{4}}}$
	г)	$y = (\sin x)^{x^2-4}$		г)	$y = (\arccos x)^{\operatorname{arctg} x}$
	г)	$2^{xy} - y^2 = 0$		г)	$\ln(x^3y^3) - y^4 = 0$
15.	а)	$y = \operatorname{arctg}^3 \sqrt{x - 5x^2}$	16.	а)	$y = \operatorname{tg}^6 \sqrt{x^2 + 8}$
	б)	$y = x^6 \arcsin 2x$		б)	$y = x^2 \cdot 4^{\frac{x}{3}}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\cos^4 x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$
	г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^{\ln x}$		г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}$
	г)	$\ln(x^3y) - y^2 = 0$		г)	$2^{x^3y} - y^4 = 0$
17.	а)	$y = \sin^5 \sqrt{x^2 + 5}$	18.	а)	$y = 5^{\sqrt{\sin^3 2x-x}}$
	б)	$y = x^5 \sin \frac{x}{2}$		б)	$y = x^4 \sin \frac{x}{6}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\cos \frac{x}{3}}$		в)	$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{5x}}$
	г)	$y = (\sin x)^{e^x}$		г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x}$
	г)	$\operatorname{ctg}(x + y^2) - y^4 = 0$		г)	$3^{x^3y} - y^4 = 0$
19.	а)	$y = \log_2^4 \sqrt[4]{3x^2 - 1}$	20.	а)	$y = e^{\sqrt{\operatorname{arctg}^2 2x+x^2}}$
	б)	$y = x^2 \operatorname{arctg} 4x$		б)	$y = x \cdot 2^{2x}$

	Б)	$y = \frac{\sqrt[7]{x^6}}{\operatorname{tg} x^8}$		Б)	$y = \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos 4x}$
	Г)	$y = (\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$		Г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$
	Г)	$3^{x^3 y} - y^3 = 0$		Г)	$\ln(x^2 y) - y^2 = 0$
21.	а)	$y = \operatorname{ctg}^6 \sqrt{x^2 - 7}$	22.	а)	$y = \cos^3 \sqrt{x^2 - 2x + 4}$
	б)	$y = x^5 \operatorname{arctg}^2 x$		б)	$y = x^2 \cdot 5^{2x}$
	Б)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{5}}$		Б)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sin 2x}$
	Г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^x$		Г)	$y = x^{\operatorname{arctg} x}$
	Г)	$\ln(x^2 y^2) - y = 0$		Г)	$2^{x^2 y} - y^5 = 0$
23.	а)	$y = \operatorname{arctg}^6 \sqrt{8x - 3x^2}$	24.	а)	$y = e^{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 3x - x^2}}$
	б)	$y = x \sin 5x$		б)	$y = x^7 \cdot 3^{5x}$
	Б)	$y = \frac{\sqrt[5]{x}}{\operatorname{tg}^5 x}$		Б)	$y = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\operatorname{arctg} 4x}$
	Г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$		Г)	$y = (x^2 - 4)^{\sin x}$
	Г)	$\sin(x^2 + y) - y^3 = 0$		Г)	$\cos(x^3 + y) - y^2 = 0$
25.	а)	$y = \operatorname{ctg}^6 \sqrt{x^2 - 9}$	26.	а)	$y = \operatorname{arcctg}^5 \sqrt{x - 4x^2}$
	б)	$y = x^7 \cdot 4^{\frac{x}{4}}$		б)	$y = x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{5}$
	Б)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\operatorname{arctg} 3x}$		Б)	$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$
	Г)	$y = (\sin x)^x$		Г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{ctg} x}$
	Г)	$\operatorname{ctg}(x^2 + y) - y^2 = 0$		Г)	$\ln(x^3 y^2) - y = 0$
27.	а)	$y = \ln^3 \sqrt{x^2 + 7x + 2}$	28.	а)	$y = \operatorname{arctg}^3 \sqrt{7x - 3x^2}$

	б)	$y = x^2 \cdot 3^{\frac{x}{4}}$		б)	$y = x^3 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$
	в)	$y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sin 5x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\operatorname{tg} \frac{x}{4}}$
	г)	$y = (\sin x)^{x^2-1}$		г)	$y = (x^3 - 3)^{\cos x}$
	г)	$\sin(x + y) - y^3 = 0$		г)	$\sin(x^3 + y) - y^3 = 0$
29.	а)	$y = \cos^5 \sqrt{x^2 - 2x + 6}$	30.	а)	$y = \ln^4 \sqrt{x^2 + 7x + 9}$
	б)	$y = x^4 \sin 3x$		б)	$y = \ln x \arcsin 3x$
	в)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\log_4 x}$		в)	$y = \frac{\sqrt[7]{x}}{\operatorname{tg} \frac{x}{3}}$
	г)	$y = (x^2 - 1)^{\operatorname{tg} x}$		г)	$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$
	г)	$\operatorname{tg}(x + y) - y = 0$		г)	$\operatorname{tg}(x + y^2) - y^3 = 0$
31.	а)	$y = \log_2^3 \sqrt{3x^2 + 1}$	32.	а)	$y = \ln^2 \sqrt{x^2 + 4x + 6}$
	б)	$y = x \cos^5 x$		б)	$y = x \arcsin^2 x$
	в)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\operatorname{tg}^4 x}$		в)	$y = \frac{\cos \frac{x}{6}}{\sqrt[8]{x^7}}$
	г)	$y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}$		г)	$y = (\arcsin x)^{e^x}$
	г)	$5^{xy} - y^4 = 0$	г)	$x^6 y^5 - \cos y = 0$	
33.	а)	$y = \ln^4 \sqrt{x^2 + 8x + 1}$	34.	а)	$y = 3^{\sqrt{e^{3x} - 5x^2}}$
	б)	$y = x^8 \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$		б)	$y = \ln x \cdot \operatorname{arctg} 4x$

	В)	$y = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\cos^3 x}$		В)	$y = \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sqrt{x}}$
	Г)	$y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$		Г)	$y = (\cos x)^{\operatorname{arccot} x}$
	Г)	$\cos(x + y) - y^2 = 0$		Г)	$x^4 y^5 - \operatorname{ctg} y = 0$
35.	а)	$y = 3\sqrt{\operatorname{tg}^2 3x - x}$	36.	а)	$y = \operatorname{tg}^5 \sqrt{x^2 + 4}$
	б)	$y = x^4 \sin \frac{x}{4}$		б)	$y = x \cos 4x$
	В)	$y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\operatorname{ctg} \frac{x}{6}}$		В)	$y = \frac{\sin \frac{x}{5}}{\sqrt[3]{x}}$
	Г)	$y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$		Г)	$y = x^{\operatorname{ctg} x}$
	Г)	$3^{xy} - y^2 = 0$		Г)	$x^5 y^5 - \operatorname{tg} y = 0$

**Завдання 3.** Дослідити методами диференціального числення функцію та побудувати її графік.

1.	$y = \frac{x-1}{x^2-4}$	2.	$y = \frac{4x^2}{4-x^2}$	3.	$y = \frac{x^3}{1-x^2}$
4.	$y = \frac{1-x^3}{x^2}$	5.	$y = \frac{2x}{x^2-1}$	6.	$y = \frac{x}{x^2-1}$
7.	$y = \frac{5-x^3}{x^2}$	8.	$y = \frac{2x+1}{3-x}$	9.	$y = \frac{x^3-2x+2}{x-1}$
10.	$y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$	11.	$y = \frac{x^2-1}{x^2+2}$	12.	$y = \frac{1}{1-x^2}$
13.	$y = \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$	14.	$y = \frac{x^3}{x^2+1}$	15.	$y = \frac{x^2}{x^2-4}$
16.	$y = \frac{x^2}{2(x-1)}$	17.	$y = \frac{x}{2-x^3}$	18.	$y = \frac{x^2-2x}{x-1}$

19.	$y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$	20.	$y = \frac{x^2+x}{x-1}$	21.	$y = \frac{x^3}{x^2+1}$
22.	$y = \frac{x^3}{x^3+1}$	23.	$y = \frac{x^3}{3-x^2}$	24.	$y = \frac{2x}{x^3-8}$
25.	$y = \frac{1}{x^2+1}$	26.	$y = \frac{x^3}{4-x^3}$	27.	$y = \frac{x^3}{x^2-1}$
28.	$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	29.	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$	30.	$y = \frac{x^3}{3(x+2)}$
31.	$y = \frac{1}{x^2-3x+2}$	32.	$y = \frac{4x^3+5}{x}$	33.	$y = \frac{3-x^2}{x+2}$
34.	$y = \frac{x^2+6}{x^2-1}$	35.	$y = \frac{x^2-4}{2x+1}$	36.	$y = \frac{x^2+16}{x^2-16}$

**Завдання 4. Проінтегрувати.**

1.	a)	$\int \frac{(\sqrt{x}+5)^2}{\sqrt{x}} dx;$	2.	a)	$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}{x} dx;$
	б)	$\int \sin^3 2x \cdot \cos 2x dx;$		б)	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx;$
	в)	$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x - 3}};$		в)	$\int \frac{x^5}{3+x^6} dx;$
	г)	$\int \frac{5 + \sin(e^{-x})}{e^x} dx;$		г)	$\int \frac{5 + \ln(2-x)}{2-x} dx;$
	д)	$\int \frac{x^6}{2-x^7} dx.$		д)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}.$
3.	a)	$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx;$	4.	a)	$\int \frac{\sqrt{x^5 - x^2}}{x} dx;$
	б)	$\int \sin^2 \frac{x}{5} \cdot \cos \frac{x}{5} dx;$		б)	$\int \cos^2 5x \cdot \sin 5x dx;$

	Б)	$\int 5^{\sin x} \cdot \cos x dx;$		Б)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}};$
	Г)	$\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx;$		Г)	$\int \frac{x^5 + \ln^3 x}{x} dx;$
	Г)	$\int \frac{x^4}{\sin^2(x^5)} dx.$		Г)	$\int \frac{x^7}{9 + x^{16}} dx.$
5.	а)	$\int \frac{x - \frac{x}{\sqrt{x}} + x^4}{4} dx;$	6.	а)	$\int \frac{(2x+1)^2}{x^3} dx;$
	б)	$\int \sin^{\frac{3}{2}} 4x \cdot \cos 4x dx;$		б)	$\int \sqrt[3]{\cos x} \cdot \sin x dx;$
	Б)	$\int \frac{\arcsin^6 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$		Б)	$\int \frac{x^2}{18 + x^3} dx;$
	Г)	$\int \frac{2^{\ln x} - x^4}{x} dx;$		Г)	$\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx;$
	Г)	$\int \frac{x}{(x^2 + 5)^4} dx.$		Г)	$\int 2^x \cos(2^x) dx.$
7.	а)	$\int \frac{(1-2x)^2}{x} dx;$	8.	а)	$\int \frac{(1+2\sqrt{x})^2}{x} dx;$
	б)	$\int \sqrt[5]{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} dx;$		б)	$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx;$
	Б)	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x + 1} \cdot x};$		Б)	$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
	Г)	$\int \frac{2x - \sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx;$		Г)	$\int \frac{2 - \sqrt{\ln x}}{x} dx;$
	Г)	$\int \frac{x^5}{(1-x^6)^4} dx.$		Г)	$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$
9.	а)	$\int \frac{(3+2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx;$	10.	а)	$\int \frac{(x+\sqrt{x})^2}{x^2} dx;$

	б)	$\int \sin^{\frac{4}{5}} 2x \cdot \cos 2x dx;$		б)	$\int \sqrt[3]{\cos 6x} \sin 6x dx;$
	в)	$\int e^x \sin(e^x) dx;$		в)	$\int \frac{\cos(e^{-x})}{e^x} dx;$
	г)	$\int \frac{dx}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}};$		г)	$\int \frac{x + x \ln x}{x^2} dx;$
	г)	$\int \frac{\sqrt[3]{\arccos x} + 2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$		г)	$\int \frac{x}{\sin^2(x^2 + 1)} dx.$
11.	а)	$\int \frac{(2\sqrt{x} + 5)^2}{x} dx;$	12.	а)	$\int \frac{(1 + 3x)^2}{x^2} dx;$
	б)	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx;$		б)	$\int \sin^2 x \cos x dx;$
	в)	$\int \frac{\sin x}{9 + \cos^2 x} dx;$		в)	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$
	г)	$\int \frac{6^{\ln x} + 1}{x} dx;$		г)	$\int \frac{x}{1 + x^4} dx;$
	г)	$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx.$		г)	$\int \frac{2x}{\sqrt{1-2^{2x}}} dx.$
13.	а)	$\int \frac{(2x-1)^2}{x^4} dx;$	14.	а)	$\int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx;$
	б)	$\int \cos^2 \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} dx;$		б)	$\int \sqrt[5]{\sin 7x} \cdot \cos 7x dx;$
	в)	$\int (2 \sin x + 5) \cos x dx;$		в)	$\int \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx;$
	г)	$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + 4}{\cos^2 x} dx;$		г)	$\int (3^{\cos x} - 4) \sin x dx;$
	г)	$\int \frac{x^2}{x^6 - 9} dx.$		г)	$\int x \sqrt{x^2 + 1} dx.$
15.	а)	$\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx;$	16.	а)	$\int \frac{(12-x)^2}{x} dx;$

	б) $\int \frac{\cos 5x}{\sin^2 5x} dx;$		б) $\int \cos^3 8x \cdot \sin 8x dx;$
	в) $\int x^3 e^{x^4+2} dx;$		в) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$
	г) $\int \frac{(x^2 + \ln x)^2}{x} dx;$		г) $\int \frac{x^3 + \frac{1}{4}}{x^4 + x} dx;$
	г) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^5}} dx.$		г) $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2} dx.$
17.	а) $\int \frac{(3 - \sqrt{x})^2}{x} dx;$	18.	а) $\int \frac{(3-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx;$
	б) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} dx;$		б) $\int \cos^2 6x \sin 6x dx;$
	в) $\int x^3 e^{x^4+2} dx;$		в) $\int \frac{\cos 10x}{\sin^2 10x} dx;$
	г) $\int \frac{x^2 + (\ln x)^2}{x} dx;$		г) $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx;$
	г) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^5}} dx.$		г) $\int x \sqrt{1-x^2} dx.$
19.	а) $\int \frac{(x+1)^2}{x^3} dx;$	20.	а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{x} dx;$
	б) $\int \sin^4 2x \cos 2x dx;$		б) $\int \sin^{11} x \cos x dx;$
	в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}} dx;$		в) $\int \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)};$
	г) $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx;$		г) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
	г) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} dx.$		г) $\int e^{x^2} x dx.$
21.	а) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx;$	22.	а) $\int \frac{(1-x)(5+x)}{x^2} dx;$

	б)	$\int \sin^3 7x \cos 7x dx;$		б)	$\int \sqrt{\sin 2x} \cos 2x dx;$
	в)	$\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx;$		в)	$\int \frac{xdx}{x^2 - 3};$
	г)	$\int \frac{e^{2x}}{5 + e^{2x}} dx;$		г)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{9 - \operatorname{tg}^2 x}};$
	г)	$\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$		г)	$\int \frac{x + (\arccos x)^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$
23.	а)	$\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx;$	24.	а)	$\int \frac{2x}{3x^2 + 5} dx;$
	б)	$\int (\cos^5 9x \sin 9x) dx;$		б)	$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx;$
	в)	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$		в)	$\int \frac{xdx}{x^4 + 2};$
	г)	$\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx;$		г)	$\int \frac{e^x dx}{9 + e^{2x}};$
	г)	$\int \frac{x}{x^4 - 1} dx.$		г)	$\int \frac{x - \operatorname{arctg}^4 x}{1 + x^2} dx.$
25.	а)	$\int \frac{x^2 - \sqrt[3]{x} + x^6}{x^5} dx;$	26.	а)	$\int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{x} dx;$
	б)	$\int \sqrt{\cos 10x} \sin 10x dx;$		б)	$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$
	в)	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^4}};$		в)	$\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 5};$
	г)	$\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}};$		г)	$\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx;$
	г)	$\int \frac{\operatorname{tg}(x+1) + 1}{\cos^2(x+1)} dx.$		г)	$\int e^{x^3+1} x^2 dx.$
27.	а)	$\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx;$	28.	а)	$\int \frac{\sqrt[3]{x} + x^2}{\sqrt{x}} dx;$

	б) $\int \cos^7 4x \sin 4x dx;$		б) $\int \sin^6 8x \cos 8x dx;$
	в) $\int \frac{xdx}{5x^4 + 1};$		в) $\int x \sin x^2 dx;$
	г) $\int \frac{e^{2\text{ctg}x}}{\sin^2 x} dx;$		г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$
	г) $\int \frac{\arcsin^3 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$		г) $\int \frac{1 + \sqrt{1 + \text{tg}x}}{\cos^2 x} dx.$
29.	а) $\int \frac{x - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx;$	30.	а) $\int \frac{(x + \sqrt[3]{x})^2}{x} dx;$
	б) $\int \sqrt{\cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4}} dx;$		б) $\int (\sqrt{\sin^2 3x} \cos 3x) dx;$
	в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}};$		в) $\int e^{-2x^3} x^2 dx;$
	г) $\int \frac{dx}{x(5 + \ln x)};$		г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x(4 + \text{ctg}^2 x)};$
	г) $\int \frac{\ln^3 x + 1}{x} dx.$		г) $\int (e^{\cos x} + 1) \sin x dx.$
31.	а) $\int \frac{(x^2 + \sqrt{x})^3}{x^2} dx;$	32.	а) $\int \frac{\sqrt[5]{x} + x^6}{x^3} dx;$
	б) $\int \sqrt{\sin^5 3x} \cos 3x dx;$		б) $\int \cos^2 4x \sin 4x dx;$
	в) $\int \sqrt{\frac{\arcsin 5x}{1 - 25x^2}} dx;$		в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3 - x^6}};$
	г) $\int (x^3 + 1) 2^{x^4 + 4x} dx;$		г) $\int \frac{\arctg x + 5}{1 + x^2} dx;$
	г) $\int \frac{3\text{tg}x + \sin x}{\cos^2 x} dx.$		г) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$
33.	а) $\int \frac{x^6 + 2\sqrt[3]{x}}{x^4} dx;$	34.	а) $\int \frac{(x^3 + \sqrt{x})^2}{x^2} dx;$
	б) $\int \sin^7 5x \cos 5x dx;$		б) $\int \sqrt[5]{\sin^2 4x} \cos 4x dx;$

	в)	$\int \frac{x^3 dx}{(x^4 - 1)^3};$		в)	$\int \sqrt{\frac{\arccos 2x}{1 - 4x^2}} dx;$
	г)	$\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x};$		г)	$\int \frac{9 + \operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} dx;$
	г)	$\int \frac{\sin \frac{2}{x}}{x^2} dx.$		г)	$\int x^2 \sqrt[5]{(x^3 + 3)^4} dx.$
35.	а)	$\int \frac{(x^2 \sqrt{x} + \sqrt[7]{x^3})^2}{x^2} dx;$	36.	а)	$\int \frac{(2x^2 + \sqrt{x})^2}{x^3} dx;$
	б)	$\int \sqrt[6]{\cos^5 7x} \sin 7x dx;$		б)	$\int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^5 6x}} dx;$
	в)	$\int \frac{\sqrt[4]{\arcsin^3 5x} dx}{\sqrt{1 - 25x^2}};$		в)	$\int \frac{\operatorname{arccotg} 3x}{9x^2 + 1} dx;$
	г)	$\int \frac{\operatorname{arccotg} x + 2x}{1 + x^2} dx;$		г)	$\int x^2 \sin x^3 dx;$
	г)	$\int (5^{\cos x} + 1) \sin x dx.$		г)	$\int \frac{\operatorname{tg}(x + 5) + 1}{\cos^2(x + 5)} dx.$

**Завдання 5.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями. Виконати побудову.

1.	а)	$y = 3x^2, y = 0, x = 1;$	2.	а)	$y = -x^2, y = -x - 2;$
	б)	$y = (x + 1)^2, y = x + 3.$		б)	$xy = 2, x = 1, x = 2, y = 0.$
3.	а)	$y = x^2 + 1, y = 2;$	4.	а)	$y = -x^2 + 1, y = 0;$
	б)	$y = 2^x, x = 1, y = 1.$		б)	$y = 3x, x = 2, y = 1.$
5.	а)	$y = (x - 1)^2, y = -x + 3;$	6.	а)	$y = x^2 - 1, y = -x - 3;$
	б)	$y = 3x^2, x = 2, y = 0.$		б)	$xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0.$
7.	а)	$y = (x - 2)^2, y = x;$	8.	а)	$y = -x^2 - 1, y = x - 3;$
	б)	$y = \ln x, x = e, y = 0.$		б)	$y = 2^{-x}, x = -1, y = 1.$

9.	a)	$y = x^2 + 2, y = x;$	10.	a)	$y = -x^2 - 1, y = -2;$
	б)	$y = 3^x, x = 1, y = 1.$		б)	$y = 2x^2, x = 2, y = 0.$
11.	a)	$y = (x+1)^2, y = -x+1;$	12.	a)	$y = -x^2 - 2, y = -x - 4;$
	б)	$xy = 3, x = 1, x = 3, y = 0.$		б)	$y = 3^{-x}, x = -1, y = 1.$
13.	a)	$y = (x+2)^2, y = x+4;$	14.	a)	$y = x^2 - 2, y = x+4;$
	б)	$xy = 2, x = 2, y = 2.$		б)	$y = x^2 - 1, y = x - 1.$
15.	a)	$y = x^2 - 1, y = 0;$	16.	a)	$y = -x^2 + 4, y = 0;$
	б)	$y = 2x^2, x = 1, y = 0.$		б)	$xy = 1, x = 1, x = 2, y = 0.$
17.	a)	$y = (x-2)^2, y = x+4;$	18.	a)	$y = -x^2 - 3, y = -x - 5;$
	б)	$y = (x+1)^2, y = 1 - x, y = 0.$		б)	$y = 3^{-x}, x = -2, y = 1.$
19.	a)	$y = (x+3)^2, y = x+5;$	20.	a)	$y = -x^2 - 3, y = x - 5;$
	б)	$xy = 4, y(4) = 4;$		б)	$y = 2^x, x = 0, y = 2.$
21.	a)	$y = x^2 - 2, y = -1;$	22.	a)	$y = -x^2 - 2, y = -6;$
	б)	$y = 2^{-x}, x = 0, y = 4.$		б)	$y = 2^{-x}, x = -2, y = 1.$
23.	a)	$y = (x+2)^2, y = -x;$	24.	a)	$y = -x^2 + 5, y = -x + 3;$
	б)	$y = -x^2 + 1, y = x + 1.$		б)	$y = 2^x, x = 0, y = 4.$
25.	a)	$y = (x-3)^2, y = x - 1;$	26.	a)	$y = -x^2 + 5, y = x + 3;$
	б)	$xy = 3, x = 3, y = 3.$		б)	$y = 3^x, x = 0, y = 3.$
27.	a)	$y = x^2 - 3, y = -2;$	28.	a)	$y = -x^2 - 3, y = -4;$
	б)	$y = 2^{-x}, x = 0, y = 2.$		б)	$y = 3^x, x = 0, y = 9.$
29.	a)	$y = x^2, y = -x + 2;$	30.	a)	$y = (x+4)^2, y = x + 6;$
	б)	$y = 2^x + 1, x = 1, x = 2, y = 0.$		б)	$y = (x+3)^2, y = 3 - x, y = 0.$
31.	a)	$y = 3x - x^2, y = -x;$	32.	a)	$y^2 = 9x, y = 3x;$

	б)	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 0, x = 2, y = 0.$		б)	$y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi.$
33.	а)	$y = x^2 + 4x, y = x + 4;$	34.	а)	$y = -\sqrt{x}, y = -\sqrt{2-x},$ $y = 0;$
	б)	$y = 3 \cos 2x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$		б)	$y = -\sqrt{x+1}, y = -\sqrt{1-x},$ $y = 0.$
35.	а)	$y = -\sqrt{x+1}, y = -\sqrt{7-x},$ $y = 0;$	36.	а)	$y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x}, y = 2 - x^2;$
	б)	$y = (x+4)^2, y = x+6,$ $y = -x-2, y \leq 2.$		б)	$y = x^2, y = 2 - x, y = 0.$

## 2.2. Приклад виконання завдання

**Приклад завдання 1.** Обчислити границі.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 3}{-2x^2 + 3x + 4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = (\text{ділимо чисельник і знаменник дробу на } x^2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{-2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{4}{-2} = -2.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^2 - 10x + 16} = \left[ \frac{0}{0} \right] = (\text{розкладаємо чисельник і знаменник дробу на}$$

$$\text{множники)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(x-1)}{(x-8)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-1}{x-2} = \frac{7}{6}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{1-x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = (\text{помножимо чисельник і знаменник дробу на}$$

$$\text{вираз, спряжений до чисельника)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)}{(1-x^2)(\sqrt{5-x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{(1-x)(1+x)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1+x)(\sqrt{5-x}+2)} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-10} \right)^{-7x+3} = [1^\infty] = (\text{додаємо і віднімаємо 1 в дужках}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x+2}{3x-10} - 1 \right)^{-7x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{12}{3x-10} \right)^{-7x+3} = (\text{помножимо степінь на}$$

$$\left( \frac{3x-10}{12} \right) \left( \frac{12}{3x-10} \right)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{12}{3x-10} \right)^{\left( -7x+3 \right) \left( \frac{3x-10}{12} \right) \left( \frac{12}{3x-10} \right)} = (\text{Вираз}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{12}{3x-10} \right)^{\left( \frac{3x-10}{12} \right)} = e \text{ (друга чудова границя)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-7x+3)12}{3x-10}} = e^{-28}.$$

**Приклад завдання 2.** Знайти похідні функції.

$$\text{А. } y = \log_7^3 \sqrt{x^2 - 12x + 3}$$

$$y' = 3 \log_7^2 \sqrt{x^2 - 12x + 3} \cdot \frac{1}{\ln 7 \sqrt{x^2 - 12x + 3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 12x + 3}} \cdot (2x - 12) =$$

$$= \frac{3 \log_7^2 \sqrt{x^2 - 12x + 3} \cdot (x - 6)}{\ln 7 (x^2 - 12x + 3)}.$$

Б.  $y = x^7 \cdot \cos^8 x$  Використаємо формулу похідної добутку  $(uv)' = u'v + uv'$ .

$$y' = 7x^6 \cos^8 x + 8x^7 \cos^7 x (-\sin x) = x^6 \cos^7 x (7 \cos x - 8x \sin x).$$

В.  $y = \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$  Використаємо формулу похідної частки  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

$$y' = \frac{\frac{5}{7} x^{-\frac{2}{7}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x^{\frac{5}{7}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{10 \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 7x}{14 x^{\frac{2}{7}} \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2(5 \sin x - 7x)}{7 x^{\frac{2}{7}} \sin^2 x}.$$

Г.  $y = (\cos x)^x$ . Прологарифмуємо рівність

$$\ln y = x \ln(\cos x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln(\cos x) + x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$y' = y(\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x)$$

$$y' = (\cos x)^x (\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x)$$

Г.  $\cos(x^3 y^3) - y = 0$  – неявно задана функція

$$-\sin(x^3 + y^3)(3x^2 + 3y^2 y') - y' = 0$$

$$3x^2 \sin(x^3 + y^3) + 3y^2 y' \sin(x^3 + y^3) + y' = 0$$

$$y'(3y^2 \sin(x^3 + y^3) + 1) = -3x^2 \sin(x^3 + y^3)$$

$$y' = \frac{-3x^2 \sin(x^3 + y^3)}{3y^2 \sin(x^3 + y^3) + 1}$$

**Приклад завдання 3.** Дослідити методами диференціального числення функцію і побудувати її графік

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 16}$$

1. Область визначення  $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; \infty)$ .

2. Функція непарна.

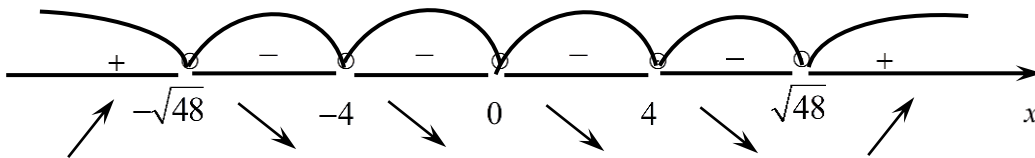
3. Знайдемо похідну функції, прирівняємо її до нуля, знайдемо критичні точки першого порядку, проміжки зростання, спадання функції, точки екстремуму, значення функції в точках екстремуму.

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 16) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{3x^4 - 48x^2 - 2x^4}{(x^2 - 16)^2} = \frac{x^4 - 48x^2}{(x^2 - 16)^2}$$

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 16) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{3x^4 - 48x^2 - 2x^4}{(x^2 - 16)^2} = \frac{x^4 - 48x^2}{(x^2 - 16)^2}$$

$$\frac{x^4 - 48x^2}{(x^2 - 16)^2} = 0 \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{48}, \quad x_{4,5} = \pm 4 \quad - \text{критичні точки першого}$$

порядку.



Отже, функція зростає на проміжках  $(-\infty; -\sqrt{48})$  і  $(\sqrt{48}; \infty)$ , спадає на проміжках  $(-\sqrt{48}; -4)$ ,  $(-4; 4)$ ,  $(4; \sqrt{48})$ . Точка  $x = -\sqrt{48}$  – точка максимуму,  $x = \sqrt{48}$  – точка мінімуму.

$$y(-\sqrt{48}) = y(-4\sqrt{3}) \approx -10,4; \quad y(\sqrt{48}) \approx 10,4.$$

4. Знайдемо другу похідну функції, прирівняємо її до нуля, знайдемо критичні точки другого порядку, проміжки опуклості, ввігнутості графіка функції, точки перегину, значення функції в точках перегину.

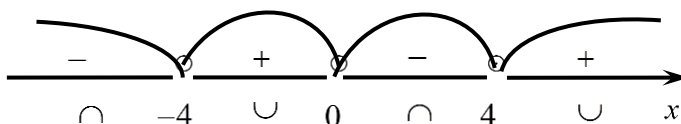
$$y'' = \frac{(4x^3 - 96x)(x^2 - 16)^2 - (x^4 - 48x^2) \cdot 2(x^2 - 16) \cdot 2x}{(x^2 - 16)^4} =$$

$$\frac{(4x^3 - 96x)(x^2 - 16) - 4x(x^4 - 48x^2)}{(x^2 - 16)^3} = \frac{4x^5 - 64x^3 - 96x^3 + 1536x - 4x^5 + 192x^3}{(x^2 - 16)^3} =$$

$$= \frac{32x^3 + 1536x}{(x^2 - 16)^3} = \frac{32x(x^2 + 48)}{(x^2 - 16)^3}.$$

$$\frac{32x(x^2 + 48)}{(x^2 - 16)^3} = 0. \quad x_1 = 0,$$

$x_{2,3} = \pm 4$  – критичні точки другого порядку.



Отже, функція опукла на проміжках  $(-\infty; 4)$  і  $(0; 4)$ , ввігнута на проміжках  $(-4; 0)$  і  $(4; \infty)$ ,  $x=0$  – точка перегину,  $y(0)=0$ .

5. Знайдемо асимптоти графіка функції, дослідимо поведінку функції поблизу точок розриву.

$x=-4$ ,  $x=4$  – вертикальні асимптоти.

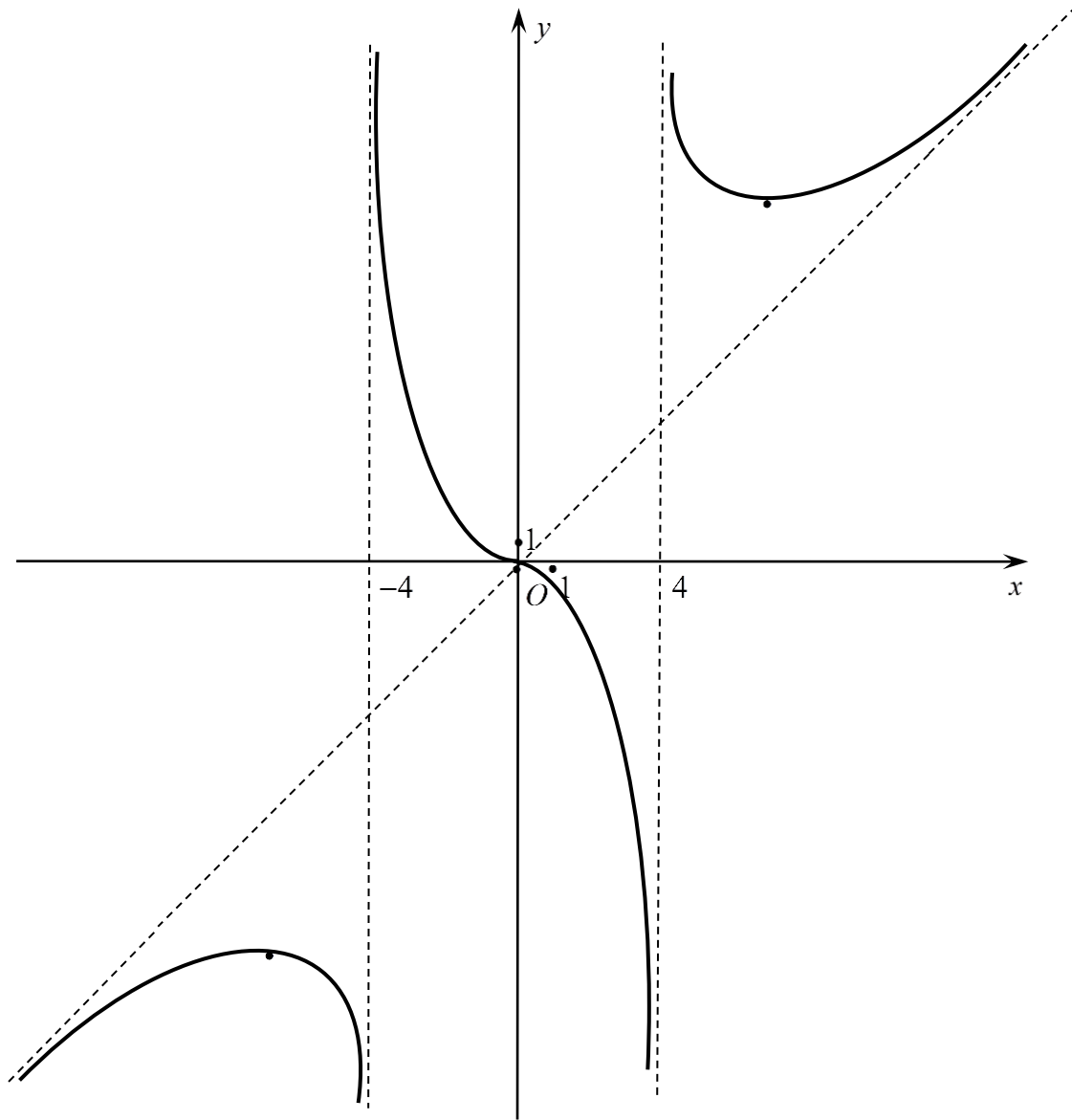
$$\lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{x^3}{x^2 - 16} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{x^3}{x^2 - 16} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x^3}{x^2 - 16} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x^3}{x^2 - 16} = \infty.$$

Знайдемо похилі асимптоти  $y=kx+b$   $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 - 16)x} = 1,$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 16} - x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x^3 + 16x}{x^2 - 16} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x}{x^2 - 16} = 0,$$

$y=x$  – похила асимптота.



**Приклад завдання 4.** Проінтегрувати.

$$A. \int \left( \sqrt[7]{x^4} - \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x} - \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{x} + 5 \right) dx = \text{(Використаємо властивість 4)} = =$$

$$\int \sqrt[7]{x^4} dx - \int \frac{8dx}{x^3} + \int \frac{4dx}{x} - \int \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{x} dx + \int 5dx = \text{(Для першого і четвертого}$$

інтегралів використаємо формулу  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ , для другого – формулу  $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ,

для четвертого – формулу  $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ , для другого, третього, четвертого, п'ятого

$$\text{інтегралів використаємо властивість 5)} = \int x^{\frac{4}{7}} dx - 8 \int x^{-3} dx + 4 \int \frac{dx}{x} - 3 \int x^{-\frac{1}{4}} dx +$$

$$5 \int dx = \text{(Для першого, другого, четвертого інтегралів використаємо табличний}$$

$$\text{інтеграл 3, для третього – 4, для п'ятого – 2)} = \frac{x^{\frac{11}{7}}}{\frac{11}{7}} - 8 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 4 \ln|x| - 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} +$$

$$5x + C = \frac{7x \cdot \sqrt[7]{x^4}}{11} + \frac{4}{x^2} + 4 \ln|x| - 4\sqrt[4]{x^3} + 5x + C.$$

$$B. \int \left( \frac{1}{x^2+9} - \frac{13}{\sqrt{x^2-8}} - \frac{3}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{6}{7-x^2} + 11^{x-3} \right) dx = \text{(Використаємо}$$

$$\text{властивості 4, 5)} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-(\sqrt{8})^2}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-x^2}} +$$

$$+ 6 \cdot \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2-x^2} + \int 11^{x-3} dx = \text{(Для першого інтеграла використаємо табличний}$$

інтеграл 18, для другого – 17, для третього – 16, для четвертого – 20, для п'ятого

$$- 6) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 13 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - (\sqrt{8})^2} \right| - 3 \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{6}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{7}}{x - \sqrt{7}} \right| +$$

$$\frac{11^{x-3}}{\ln 11} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 13 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 8} \right| - 3 \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{3}x}{3} +$$

$$+ \frac{3\sqrt{7}}{7} \ln \left| \frac{(x + \sqrt{7})^2}{x^2 - 7} \right| + \frac{11^{x-3}}{\ln 11} + C.$$

$$\text{В.} \quad \int \left( \frac{12}{x+9} - \frac{3}{(x+3)^2 + 7} - \frac{2}{(x+3)^{16}} - \frac{11}{(x+4)^2 - 7} + \sqrt[4]{x+3} \right) dx =$$

(Використаємо властивості 4, 5, а для третього і п'ятого доданків – формули  $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$  і  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  відповідно) =  $12 \int \frac{dx}{x+9} - 3 \int \frac{dx}{(x+3)^2 + (\sqrt{7})^2} -$

$$- 2 \int (x+3)^{-16} dx - 11 \int \frac{dx}{(x+4)^2 - (\sqrt{7})^2} + \int (x+3)^{\frac{1}{4}} dx = \text{(Для першого}$$

інтеграла використаємо табличний інтеграл 4, для другого – 18, для третього і п'ятого – 3, для четвертого – 19) =  $12 \ln|x+9| - \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{\sqrt{7}} -$

$$- 2 \cdot \frac{(x+3)^{-15}}{-15} - \frac{11}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x+4-\sqrt{7}}{x+4+\sqrt{7}} \right| + \frac{(x+3)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = 12 \ln|x+9| -$$

$$- \frac{3\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}(x+3)}{7} + \frac{2}{15(x+3)^{15}} - \frac{11\sqrt{7}}{14} \ln \left| \frac{(x+4-\sqrt{7})^2}{(x+4)^2 - 7} \right| +$$

$$+ \frac{4(x+3)\sqrt[4]{x+3}}{5} + C.$$

$$\text{Г.} \quad \int \left( e^{7-5x} + \sin \left( 2 + \frac{5}{8}x \right) + \frac{3}{\sqrt[6]{(5x-2)^5}} + \sqrt[7]{(7-4x)^3} - \frac{10}{17-3x} \right) dx =$$

(Використаємо властивість 4, потім для третього і п'ятого доданків властивість 5, а для третього і четвертого доданків формулу  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  і для третього

доданка формулу  $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ) =  $\int e^{7-5x} dx + \int \sin \left( 2 + \frac{5}{8}x \right) dx + 3 \int (5x-2)^{-\frac{5}{6}} dx +$

$$\int (7-4x)^{\frac{3}{7}} dx - 10 \int \frac{dx}{17-3x} = \text{(для всіх інтегралів використаємо властивість 6;}$$

для першого інтеграла використаємо табличний інтеграл 7, для другого – 8, для

третього і четвертого – 3, для п'ятого – 4) =  $-\frac{1}{5}e^{7-5x} - \frac{1}{\frac{5}{8}} \cos\left(2 + \frac{5}{8}x\right) +$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3(5x-2)^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{(7-4x)^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 10 \ln|17-3x| + C = -\frac{1}{5}e^{7-5x} -$$

$$\frac{8}{5} \cos\left(2 + \frac{5}{8}x\right) + \frac{18 \sqrt[6]{5x-2}}{5} - \frac{7(7-4x) \cdot \sqrt[7]{(7-4x)^3}}{40} - \frac{10 \ln|17-3x|}{3} + C.$$

Г.  $\int \left( \frac{5}{\sqrt{6x^2+1}} + \frac{6}{10x^2+7} - \frac{9}{\sqrt{9-3x^2}} + \frac{2}{4-\frac{8x^2}{3}} \right) dx =$  (Використаємо

властивості 4, 5) =  $5 \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6}x)^2+1}} + 6 \int \frac{dx}{(\sqrt{10}x)^2+(\sqrt{7})^2} - 9 \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(\sqrt{3}x)^2}} +$

$$+ 2 \int \frac{dx}{2^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}}x\right)^2} =$$
 (для всіх інтегралів використаємо властивість 6; для

першого інтеграла використаємо табличний інтеграл 17, для другого – 18, для

третього – 16, для четвертого – 20) =  $\frac{5}{\sqrt{6}} \ln \left| \sqrt{6}x + \sqrt{(\sqrt{6}x)^2+1} \right| +$

$$+ \frac{6}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{7}} - \frac{9}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{8}{3}}x+2}{\sqrt{\frac{8}{3}}x-2} \right| + C =$$

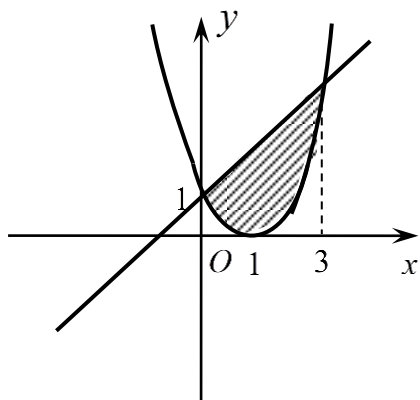
$$= \frac{5\sqrt{6}}{6} \ln \left| \sqrt{6}x + \sqrt{6x^2+1} \right| + \frac{3\sqrt{70}}{35} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{70}x}{7} - 3\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{3} +$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \ln \left| \frac{(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2}{2x^2-3} \right| + C.$$

**Приклад завдання 5.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

Виконати побудову

$$y = (x-1)^2; \quad y = x+1.$$



**Розв'язання.** Щоб знайти межі інтегрування  $a$  і

$b$ , знайдемо абсциси точок перетину ліній

$$\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = x+1; \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

$$S = \int_0^3 (x+1 - (x-1)^2) dx = \left. \frac{(x+1)^2}{2} \right|_0^3 -$$

$$- \left. \frac{(x-1)^3}{3} \right|_0^3 = 8 - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2} \quad (\text{квдратних}$$

одиниць).

## **Розділ 3. Критерії та шкала оцінювання контрольної роботи та порядок захисту**

### **3.1. Критерії та шкала оцінювання**

Виконання контрольної роботи оцінюється від 0 до 30 балів. Контрольна робота містить 5 завдань, кожне з яких оцінюється в 6 балів відповідно, та розподіл балів виконується наступним шляхом:

- оформлення звіту згідно вимог, наведено повне та вірне рішення окремого завдання – 6 балів;
- оформлення звіту з недотриманням вимог, неповне рішення окремого завдання – 3 бали;
- звіт не підготовлений – 0 балів.

### **3.2. Порядок захисту**

Завершена контрольна робота подається на кафедру. Термін здачі контрольних робіт визначається календарним планом навчального процесу. Контрольна робота перевіряється на профілюючій кафедрі в тижневий термін. Викладач, який перевіряє виконану контрольну роботу, дає попередню оцінку за двобальною ("зараховано", "не зараховано") шкалою.

Робота, яка заслуговує попередньої позитивної оцінки, допускається до захисту. Після перевірки контрольна робота повертається студенту як мінімум за 3 дні до її захисту. Це робиться для того, щоб надати відповідний час для підготовки до захисту. Якщо робота не зарахована, викладач залишає за собою право видати інше завдання і встановити новий строк для його виконання.

Процедура захисту роботи полягає у наданні короткої доповіді (5-10 хвилин), де треба розкрити зміст рішення кожного завдання. Захист контрольної роботи передбачає і відповіді на питання, поставлені викладачем.

Результати захисту суттєво впливають на остаточну оцінку контрольної роботи. Якщо студент належним чином не підготувався до захисту, не в змозі дати вичерпні відповіді на запитання, остаточна оцінка контрольної роботи може бути переглянута у порівнянні з попередньою.

## **Рекомендована література**

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: навч. посіб./Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа: підручник./А.Ф. Бермант. – М.: Физматгиз, 1963. – 664 с.
3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях: навч.посіб./Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. – М.: Издательство МГУ, 1991. –352 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.
5. Дюженкова Л. І., Носаль Т. В. Вища математика: навч. посіб./ Л.І. Дюженкова, Т.В. Носаль – К.: Вища школа, 1991. – 407 с.
6. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу: збірник задач/ Под ред. Демидовича Б. П. – М.: Наука, 1974. – 472 с.
7. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной): навч. посіб./ И.А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа: підручник./ С.М. Никольский С.М. – М.: Наука, 1991. – 544 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: навч.посіб. в двух томах/Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 432+560 с.
10. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: навч. посіб./ А.М. Самойленко, С.А Кривошея., Н.А.Перестюк. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления:підручник./ Г.М. Фіхтенгольц, Том II. – М.: Физматгиз, 1962. – 807 с.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления:підручник./ Г.М. Фіхтенгольц, Том III. –М.: Физматгиз, 1963. – 656 с.
13. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди: навч. посіб./ Н.М Шунда., А.А.Томусяк. – К.: Вища шк., 1995. – 541 с.
14. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: навч.посіб./ Н. В. Богомолов.– М.: Высшая школа, 1981. – 720 с.
15. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1981. – 720 с.

16. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П.. Справочное пособие по математическому анализу. – К: Вища школа, 1986. – 567 с.

**Зразок оформлення титульної сторінки контрольної роботи**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Полтавський державна аграрна академія

Кафедра інформаційних систем та технологій

# **КОНТРОЛЬНА РОБОТА**

**з дисципліни  
«Математичний аналіз»**

Виконав: ЗВО \_\_\_\_ курсу, \_\_\_\_\_ групи  
факультету економіки та менеджменту  
спеціальності 126 «Інформаційні системи  
та технології»  
заочної форми навчання

\_\_\_\_\_  
Номер залік.кн. \_\_\_\_\_  
Номери питань \_\_\_\_\_

Перевірив: \_\_\_\_\_

Полтава – 20\_\_\_\_