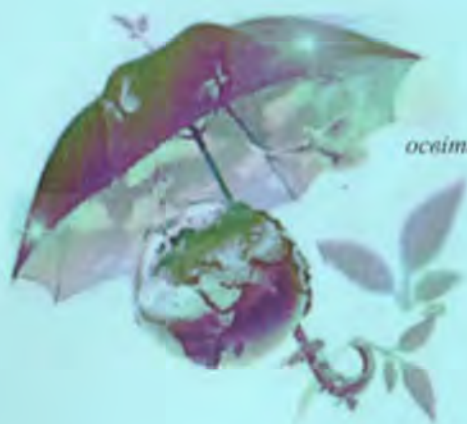


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКА ДЕРЖАВНА АГРАРНА АКАДЕМІЯ

Кафедра інформаційних систем та технологій

Н. М. Протас

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
із дисципліни
“ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ”



*для здобувачів вищої освіти
освітньо-професійної програми Екологія
спеціальності 101 Екологія*

Полтава 2018



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКА ДЕРЖАВНА АГРАРНА АКАДЕМІЯ

Кафедра інформаційних систем та технологій

Н. М. Протас

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
із дисципліни
“ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ”



*для здобувачів вищої освіти
освітньо-професійної програми Екологія
спеціальності 101 Екологія*

Полтава 2018

Завдання для лабораторних робіт із дисципліни «Основи математичного моделювання в екології» для здобувачів вищої освіти освітньо-професійної програми Екологія спеціальності 101 Екологія підготовлені доцентом кафедри інформаційних систем та технологій, к.с.-г.н. Н. М. Протас, на основі опрацювання та узагальнення методичних матеріалів кафедри, підготовлених у співавторстві з А. В. Калініченко, О. Г. Міньковою, К. Д. Костоглодом та ін.

Затверджено та рекомендовано до друку на засіданні кафедри інформаційних систем та технологій (протокол № 2 від 04 вересня 2018 р.)

ВСТУП

Мета навчальної дисципліни «Основи математичного моделювання в екології»: формування у майбутніх фахівців теоретичних знань і практичних навичок побудови та використання різних типів математичних моделей в галузі охорони довкілля, формалізації та розв'язання оптимізаційних задач екології та природокористування з застосуванням математичних методів.

Матеріали запропонованої методичної розробки допоможуть здобувачам закріпити теоретичні відомості з дисципліни; покрокове виконання наведених вказівок дозволить сформувати практичні навички використання програмних продуктів для виконання завдань, що можуть виникати у професійній діяльності. Певні оптимізаційні моделі, алгоритми виконання обчислень і використання методів, засоби та можливості табличного процесора щодо розв'язання задач розглянуті на конкретних прикладах.

Підготовку до конкретної лабораторної роботи здобувач вищої освіти здійснює самостійно за день-два до дня виконання цієї роботи шляхом вивчення теоретичного матеріалу, що стосується теми роботи. Короткі пояснення щодо суті дії, яка повинна бути виконана, приведені в даних методичних вказівках, а більш докладно теоретичний матеріал викладений в підручниках і посібниках, перелік яких наведений наприкінці видання.

Безпосереднє виконання роботи здійснюється на комп'ютері згідно завдання під час проведення лабораторного заняття. У кожній з робіт нумеровані пункти списку визначають загальне завдання стосовно певної теми. Підпункти маркірованого списку описують порядок виконання завдання. Якщо подібне завдання вже було описано раніше, то здобувачу необхідно виконати його самостійно.

Наприкінці кожної лабораторної роботи наведені вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи, контрольні запитання щодо розглянутої теми, на які здобувач повинен знати відповіді при захисті звіту; список основних літературних джерел для опанування матеріалу.

ТЕМА 1. ПРЕДМЕТ І ЗАДАЧІ ДИСЦИПЛІНИ. КОНЦЕПТУАЛЬНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЕКОЛОГІЇ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

Тема: Концептуальні аспекти математичного моделювання в екології

Мета: Опанувати основні поняття дисципліни, засвоїти етапи моделювання, з'ясувати роль і місце сучасних математичних методів і моделей в екології

Завдання:

1. Засвоїти основні поняття математичного моделювання: визначення моделі та математичної моделі, властивості та типи моделей; етапи моделювання.
2. Визначити роль і місце сучасних математичних методів і моделей в екології.
3. Познайомитися з основними групами економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві.
4. Познайомитися з розробленими математичними моделями агробіопроектів.
5. Ознайомитися з комп'ютерними програмами для моделювання та прогнозування стану довкілля.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка, персональний комп'ютер, де встановлено текстовий процесор Microsoft Word, із виходом до мережі Internet.

Короткий теоретичний коментар

Соціально-економічні процеси взаємодії людини з навколишнім середовищем настільки складні і масштабні, що сподіватися на їх стихійну адаптацію у сприятливому для людини напрямку нерозумно і небезпечно. Сучасна діяльність висуває задачу вивчити дію всієї сукупності факторів, які обумовлюють розвиток людства, з одного боку, та шляхів свідомого керування цим процесом, з іншого, на основі врахування екологічних інтересів. Сьогодні керування соціально-економічними і еколого-економічними системами стає однією з основних форм людської діяльності. Це вимагає уміння обліку і врахування великої кількості багаторівневих взаємодій, динамічного характеру розвитку систем у цілому та їх окремих

елементів і підсистем. У цих умовах важливим інструментом аналізу стану довкілля виступають методи математичного моделювання.

Моделлю називається узагальнення характерних особливостей і закономірностей властивих досліджуваному об'єкту або процесу, виконане певними засобами зображення. *Модель* – це своєрідний інструмент пізнання дослідником певного об'єкту чи явища; засіб формування чіткого уявлення про дійсність. У сільському господарстві широко використовуються математичні моделі, які ґрунтуються на формально-логічному апараті математики. *Математична модель* – це формалізований опис на мові математики змісту і мети функціонування об'єкта.

Математична формалізація економічної задачі одержала найменування *економіко-математичної моделі*. Якщо при розв'язанні економічних задач враховані екологічні складові, то такі моделі можна вважати *еколого-економічними*.

Моделі можна класифікувати й за іншими ознаками. Зокрема, – в залежності від їх призначення та використовуваного апарату (дискретні–неперервні, детерміновані–стохастичні, точкові–просторові, статичні–динамічні).

Процес побудови, вивчення та застосування моделей називають *моделюванням*. *Моделювання* – це подання різноманітних характеристик поведінки фізичної чи абстрактної системи за допомогою іншої системи. *Математичне моделювання* – це метод дослідження процесів та явищ на їх математичних моделях. Суть моделювання полягає в побудові, вивченні та застосуванні моделі певного об'єкта чи процесу.

У цілому можна сказати, що в усіх випадках основним об'єктом дослідження за допомогою математичних моделей є система. Системами є об'єкти живої природи, економічні і виробничі відносини, частини Всесвіту (макросвіт) і того мікросвіту, який створює основу будь-якої речовини. Системами є всі створені людиною механізми, пристрої, технології.

Поняття «*система*» визначається як множина елементів із відношеннями та зв'язками між ними, що створює визначену цілісність. При цьому береться до уваги той факт, що система як упорядкована цілісна множина взаємопов'язаних елементів, які володіють структурою і організацією, у своїй взаємодії із середовищем демонструє відповідну поведінку, визначену як впливом середовища, так і власними цілями, що мають на увазі перетворення середовища, підпорядкування його своїм потребам та що ефект функціонування системи в цілому може відрізнятися від сумарного ефекту її складових частин. Таким чином, *будь-яка система може характеризуватися такими особливостями*: структурою, наявністю зв'язків між її складовими, залежністю від зовнішнього середовища, впливом на зовнішнє середовище, наявністю кількісних характеристик, які визначають стан системи в кожен момент часу, зміною стану системи з часом, участю деяких імовірних факторів у функціонуванні системи.

Під *екологічною системою* треба розуміти систему, конкретний зміст якої пов'язаний із відношеннями в галузі екології, тобто відношеннями живих організмів з їх середовищем перебування і, зокрема в галузі взаємовідносин людини і довкілля. Такі екосистеми мають специфічні особливості, які обумовлюють їх властивості. Тому ставлячи перед собою завдання дати будь-який загальний виклад практичних прийомів побудови моделей екологічних систем, необхідно враховувати їх особливості, які багато в чому полегшують виконання цього завдання. Так, екосистеми охоплюють своїми взаємозв'язками не лише природне середовище, але й соціальну та всі виробничі й інші галузі народного господарства. Тому об'єктами екосистем можуть бути будь-які елементи природного середовища, промисловості, транспорту, сільського господарства адміністративного управління, культури, науки і т.п.

Процес побудови будь-якої математичної моделі неможливо формалізувати і тим паче апріорі алгоритмізувати, проте деякий загальний план побудови математичних моделей можна скласти. Його описують в формалізованих (кількісних) символах.

Основними етапами моделювання є:

1. Попереднє вивчення системи та її якісних показників.
2. Загальна постановка задачі оцінки ефективності управління або економічного функціонування, тобто визначення мети.
3. Розробка математичної моделі досліджуваної системи або її частини.
4. Розв'язання математичної моделі.
5. Перевірка узгодженості розв'язку задачі та відповідних практичних рекомендацій з реальними даними (перевірка адекватності моделі).
6. Корегування моделі.
7. Упровадження рішення в практику.

У сільськогосподарському виробництві часто виникають задачі оптимізації, за умови обмежених ресурсів. Як правило, вони відносяться до задачі лінійного програмування.

Класифікація задач у сільськогосподарському виробництві та природокористуванні:

1). Оптимізаційні задачі:

1. Задачі оптимального виробництва.
2. Задачі складання раціону (про використання ресурсів).
3. Задачі про використання виробничих потужностей (задача про завантаження обладнання).
4. Задачі розкрою матеріалів.

Методи розв'язання оптимізаційних задач об'єднані в розділ математики, який називається математичним програмуванням.

У сільському господарстві можна навести наступні групи економіко-математичних моделей.

1. Моделі оптимізації структури посівних площ.

2. Моделі оптимізації структури і обороту стада.
3. Моделі оптимізації кормових раціонів тварин.
4. Моделі оптимального виробництва і використання кормів
5. Моделі оптимального розподілу мінеральних добрив.
6. Моделі оптимізації складу та використання машинно-тракторного парку.
7. Моделі оптимального поєднання галузей на сільськогосподарських підприємствах та ін.

II). Задачі розподілу ресурсів.

III). Задачі ремонту, експлуатації та заміна обладнання.

IV). Моделювання конфліктних і конкурентних процесів (ігри з природою).

V). Системи масового обслуговування та інші.

Застосування методів моделювання в екології має ще більше значення, ніж у техніці, вже тому, необхідно вирішувати завдання дуже складні, недостатньо вивчені, до того ж занадто високовартісні та дуже складно прогнозовані за своїми віддаленими наслідками. Чим складніші проблеми наукового дослідження виникають в екології, тим більш досконалими повинні бути методи моделювання, тим вища їх роль і значення.

Порядок і методика виконання завдань

1. Засвоїти основні поняття математичного моделювання: визначення моделі та математичної моделі, властивості та типи моделей; етапи моделювання. Визначити роль і місце сучасних математичних методів і моделей в екології

На основі теоретичного матеріалу лекцій, навести основні поняття дисципліни «Основи математичного моделювання в екології». Узагальнити та структуруйте знайдену інформацію. Виконати практичне завдання на ПК для засвоєння етапів моделювання.

Для закріплення теоретичного матеріалу необхідно у Microsoft Word створити новий документ, де навести визначення поняття «модель», «моделювання» та відтворити загальну схему етапів моделювання із використанням автофігур (стрічка **Вставка**⇒**Фигуры**) або об'єктів SmartArt.

2. Познайомитися з основними групами економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві.

Пригадати основні групи економіко-математичних моделей, що можуть мати місце у сільському господарстві. Познайомитися з загальною постановкою запропонованих оптимізаційних задач аграрного виробництва.

3. *Познайомитися з розробленими математичними моделями агробіопроектів.*

Скориставшись інформаційно-пошуковою системою, у всесвітній мережі Інтернет знайти інформацію про розроблені науковцями математичними моделями, що описують агробіопроекти.

Щоб знайти потрібну інформацію про засоби моделювання стану довкілля або на будь-яку іншу тему, користувачу необхідно в обраній програмі-браузері в адресному рядку ввести конкретну адресу сайту, що його цікавить. Наприклад,

<http://www.eea.europa.eu/data-and-maps> – дані про стан довкілля в Європі з порталу Європейського агентства з навколишнього середовища;

www.menr.gov.ua – офіційний сайт Міністерства екології та природних ресурсів України;

www.ukrstat.gov.ua – офіційний сайт Державної служби статистики України

Якщо ж адреси сайтів невідомі, тоді для пошуку інформації необхідно використати одну з відомих пошукових веб-систем. Найбільш популярною у світі є система Google.

Для ефективного пошуку інформації в Інтернет за допомогою пошукової машини слід скористатися деякими загальними практичними порадами

1. Визначитися з метою пошуку та мовою запиту. При цьому потрібно концентруватися не тільки на самій меті, але і на тому, що може їй супроводити (ключові слова, спеціальні терміни, дієслова і так далі). Кількість україномовних сторінок в мережі Інтернет значно менша, ніж англійськомовних. Тому варто робити пошук потрібної інформації й англійською мовою.

2. Є звичайний пошук, а є розширений пошук із значно більшою кількістю умов та фільтрів. Найпростіший спосіб перейти до розширеного пошуку в будь-якій пошуковій системі це – просто набрати у ній запит «розширений пошук» і першим же результатом пошуку буде форма для цього розширеного пошуку.

3. Для простого пошуку введіть ключові слова у поле запиту (смужка білого кольору у верхній частині чи по центру вікна). Як правило, не має значення літери великі чи маленькі. Але, якщо ключові слова починаються з великої літери або повністю введені великими літерами (наприклад «ОНД-86» чи «SILAM»), то ці ж слова, написані маленькими літерами, знайдені не будуть. При введенні ключових слів маленькими літерами область пошуку розширюється, тому що ключові слова шукаються незалежно від регістра.

4. Пошукова система прагне, в першу чергу, знайти сторінки, на яких знаходиться максимальна кількість слів із вашого запиту, більше того, якщо ці слова ще й слідує одне за іншим та розташовані ближче до початку сторінки або в заголовках. Бажано не використовувати у запиті прийменники, слова-паразити, ставити слова у відмінки та ін.

5. Іноді необхідно не прибирати зайві слова, а навпаки деталізувати запит, якщо слова, задані для пошуку, дуже загальні, а результати настільки схожі, що

не легко вибрати потрібне з десятків або сотень сторінок. Наприклад, пошук по словах «модельовання атмосфери» дасть тисячі різних документів. Слова "математичне модельовання забруднення атмосферного повітря в Україні" звужать коло пошуку. "Математичне модельовання забруднення атмосферного повітря модель Гауса в Україні" напевно буде значно точнішим варіантом.

6. У більшості випадків просто сформулювати запит недостатньо. Необхідно використовувати оператори мови запитів пошукової системи, яка використовується. Ці оператори допоможуть знаходити таку інформацію, яку за допомогою простих запитів знайти неможливо.

Оператори, спільні для всіх пошукових систем:

- оператор строгої відповідності, як правило, в сучасних пошукових системах це – лапки "". Поєднання слів, вказаних в лапках, враховуватиметься системою як єдине ціле, тобто таким чином задається порядок слідування слів одне за іншим. Наприклад, за запитом *модельовання стану довкілля* будуть отримані в результаті пошуку сторінки зі словами, що згадуються відокремлено, тобто на одній сторінці може бути слово «модельовання», на іншій – «стану» та «довкілля». Конструкція ж в лапках «модельовання стану довкілля» примушує пошукову систему відкинути всі зайві сторінки і показувати лише ті, на яких ці три слова йдуть одне за іншим.
- Оператор обов'язкової наявності слова "+" ("плюс" або «&», або AND) і оператор обов'язкової відсутності слова "-" ("мінус" або NOT). Наприклад, якщо ви хочете знайти матеріали про математичне модельовання забруднення саме поверхневих вод тоді до «математичне модельовання забруднення вод» варто додати +поверхневих: «математичне модельовання забруднення вод» + «поверхневих». Якщо ж потрібно вивести всі такі ж результати, але без згадування підземних вод, потрібно ввести: «математичне модельовання забруднення вод» +поверхневих -підземних.
- Оператор логічного «АБО», в якості якого використовується логічний оператор OR (знак «|») дозволяє знайти хоч би одне слово із запиту. Наприклад, за допомогою запиту: модельовання OR прогнозування можна знайти документи, в яких зустрічається або слово «модельовання», або слово «прогнозування».
- Складні запити за допомогою логічних операторів можна здійснювати, використовуючи круглі дужки: системи моніторингу довкілля AND (обласні OR басейнові); системи моніторингу (річок OR водосховищ) + (обласні OR басейнові). Дужки задають певний порядок ключових слів і виконання їх операторів.
- Пошук без урахування морфології. Щоб зафіксувати словоформу без розгляду машиною її морфологічних варіацій в рядку запиту перед терміном ставиться знак "!". Наприклад: !динамічна !математична !модель.
- Усікання (пошук по частині ключового слова). Як правило, для цієї мети вживаються знаки: «*» (позначає довільну частину слова) і «?»

(позначення будь-якого символу). Запит вод* дасть результати “вод”, ”вода”, ”водних”, «водосховище», «водойма» тощо.

- Запит: к?мпанія – результат: кампанія або компанія.
 - З мовами запитів конкретної пошукової системи можна завжди ознайомитися в її розділі допомоги.
7. Кількість посилань на одній сторінці автоматично для більшості пошукачів дорівнює 20, але цю кількість можна змінити в налаштуваннях.
8. Варто враховувати, що текст посилань представлений тільки латинськими символами, більш того – англійськими словами. Тому, якщо здійснюється пошук книги – пишемо: books, посилання – links або http тощо

Надалі серед знайдених матеріалів слід обрати сторінки, що найбільш вдало розкривають шукане питання і найбільш точно відповідають поставленим критеріям. Інформацію зберігають на диску у вигляді веб-сторінок, або ж виділяють окремі фрагменти і копіюють у файли Word чи інших додатків для подальшої обробки і зберігання.

4. Ознайомитися з комп'ютерними програмами для моделювання та прогнозування стану довкілля

У всесвітній мережі Інтернет знайти інформацію про існуючі комп'ютерні програми та системи для моделювання та прогнозування стану довкілля.

5. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл laboratorna_1.docx.

Завдання для практичного виконання, порядок і методика щодо їх виконання

1. Сформулюйте визначення таких понять: модель, математична модель, економіко-математична модель та моделювання.
2. Назвіть роль і місце сучасних математичних методів і моделей в екології
3. Охарактеризуйте основні групи економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві.
4. Завантажте текстовий процесор Microsoft Word. У новому документі подайте у вигляді схеми основні етапи моделювання.
5. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_1.docx*
6. Пригадайте основні групи економіко-математичних моделей, що можуть мати місце у сільськогосподарському виробництві.

7. Ознайомтеся з загальною постановкою оптимізаційних задач аграрного виробництва. Продумайте, які умови щодо раціонального використання ресурсів можна додати в дані задачі.

Оптимізація структури посівних площ

Приклад 1.

У господарстві для вирощування технічних культур може бути виділено 1400 га ріллі та 17600 люд.-дн. Прямі витрати праці на 1 га цукрових буряків і соняшника плануються відповідно 40 та 6 люд.-дн., а урожайність цих культур – відповідно 320 і 18 ц/га.

Визначити такі площі посіву означених культур, які забезпечили б максимум товарної продукції за умови, що площа соняшника не перевищує 80% загальної площі посіву технічних культур.

Закупівельна ціна 1 ц цукрових буряків становить 96 грн, а 1 ц соняшнику – 1100 грн.

Приклад 2.

Визначити оптимальні площі посіву кормових культур у господарстві, якщо відомо, що на їх вирощування може бути виділено b_1 тис.грн, b_2 га ріллі, в тому числі на вирощування кукурудзи на силос – не більше b_3 га. Сіна однорічних трав планується отримати не менше b_4 центнерів кормових одиниць. Плановий вихід кормів на 1 га (в ц.к.од.), виробничі затрати на 1 га (в гривнях) по культурах наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

Показники	Культури		
	кукурудза на силос	кормові буряки	однорічні трави на сіно
Виробничі витрати, грн/га	a_1	a_2	a_3
Вихід кормів. ц.к.од./га	40	80	20

Площі повинні забезпечити максимальний вихід кормів у кормових одиницях

Приклад 3.

Розрахувати оптимальний план розподілу мінеральних і органічних добрив в господарстві під посів двох сільськогосподарських культур – озимої пшениці і кукурудзи на зерно, так, щоб отримати максимальну урожайність (в центнерах і гривнях) за рахунок внесення добрив. Під вирощування продовольчих культур виділяється b_1 га ріллі, b_2 ц органічних добрив і b_3 ц діючої речовини мінеральних добрив. Норми внесення мінеральних і органічних добрив на 1 га кожної культури (в центнерах діючої речовини і в центнерах), прибавка врожаю за рахунок внесення добрив з 1 га (в центнерах) наведені в таблиці 3.

Таблиця 3.

Показники	Культури	
	Озима пшениця	Кукурудза на зерно
1. Норми внесення мінеральних добрив, ц діючої речовини /га	2,2	2,4
2. Норми внесення органіки, ц/га	225	310
3. Прибавка врожаю за рахунок внесення добрив, ц/га:	9,6	10,8

Оптимізація кормових раціонів тварин

Приклад 4.

Визначити оптимальний варіант добового раціону годівлі дійних корів молочного напрямку в стійловий період при жирності молока 3,8 %, середньодобовому надої 18 кг і живій масі корови 470 кг. Господарство має корми трьох видів: концентровані, грубі, соковиті (силос).

Мінімально допустима добова потреба, розрахована згідно з вагою корови, її продуктивністю і жирністю молока, складає 13 корм.од. Відомі середній вміст кормових одиниць в 1 кг кожної групи кормів і собівартість 1 кг кормів (таблиця 4).

Таблиця 4.

Показники	Корми		
	концентровані	грубі	силос
Поживність кормів, корм.од./кг	1,0	0,4	0,2
Собівартість кормів, грн./кг	1,9	0,2	0,5

За рахунок грубих кормів повинно забезпечуватися не більше 20% фізіологічної потреби корів у кормових одиницях. Добовий раціон повинен містити не більше b_1 кг силосу, не більше b_2 кг концентратів.

Оптимальний добовий раціон повинен мати мінімальну собівартість і забезпечувати фізіологічні потреби тварин.

Приклад 5.

З комбікорму, цукрових буряків та трав'яного борошна необхідно скласти кормовий раціон для свинопоголів'я на відгодівлі, добова потреба якого в розрахунку на 1 голову складає 4 корм.од. і 400 г перетравного протеїну. Визначити такий склад кормового раціону, який мав би мінімальну вартість і забезпечував би потреби тварин у поживних речовинах за умови, що вміст трав'яного борошна у ньому не може бути більшим 0,4 кг. Поживність кормів і їх вартість наведена в таблиці 5

Таблиця 5.

Показники	Корми концентровані	Цукрові буряки	Трав'яне борошно
Поживність корму, корм.од./кг	1,10	0,26	0,60
Вміст перетравного протеїну, г/кг	120	13	150
Вартість корму, коп./кг	240	50	110

Оптимізація складу та використання машинно-тракторного парку

Приклад 6.

Упродовж тижня (6 робочих днів) гусеничні трактори ДТ-75М, CASE IH STX 450 і колісні трактори МТЗ-82 і JOHN DEERE 8300 можуть відпрацювати на оранці 250 тракторо-змін. Коефіцієнт змінності гусеничних тракторів становить 2, а колісних – 1,5. Експлуатаційні витрати за тиждень в розрахунку на один трактор відповідно становлять 1100 і 1160, 700 і 740 грн. Необхідно визначити таку кількість тракторів кожної з марок, яка забезпечила б максимальний обсяг робіт за умов, що змінний виробіток одного трактора ДТ-75М становить 7 га, CASE IH STX 450 – 8 га, МТЗ-82 – 6 га, JOHN DEERE 8300 – 6,4 га. Загальна сума експлуатаційних витрат не повинна перевищувати 13 тис.грн. Кількість тракторів ДТ-75М не може бути більшою 3.

Приклад 7.

Відпускні ціни на автомобілі, їх вантажопідйомність, середньодобовий пробіг і коефіцієнти використання вантажопідйомності та пробігу наведені в табл.7.

Визначити оптимальний план поповнення автопарку, враховуючи наступне:

- кількість бортових автомобілів (ГАЗ і КАМАЗ) повинна становити не менше 75% від загальної кількості автомобілів;
- кількість автомобілів ГАЗ-3307 повинна бути не менше 4 штук;
- придбані автомобілі повинні забезпечити виконання 900 тис.т-км за рік (250 робочих днів) при мінімальних загальних витратах на їх придбання.

Таблиця 7

Показники	Марки автомобілів		
	ГАЗ-3308	КАМАЗ-43114	ЗІЛ-4331
Відпускні ціни, тис.грн	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Вантажопідйомність, т	4,0	10,0	9,5
Середньодобовий пробіг, км	100	120	80
Коефіцієнт використання:			
– вантажопідйомності	0,6	0,8	0,8
– пробігу	0,8	0,5	0,5

Оптимізація поєднання галузей

Приклад 8.

У фермерському господарстві, що має овочево-молочну спеціалізацію, упродовж року в основних галузях може бути відпрацьовано 10 тис.люд.-днів. Витрати праці на одну структурну корову плануються 65, а на 1 га овочів – 90 люд.-днів. Матеріальні витрати та витрати на оплату праці у молочному

скотарстві на одиницю виміру галузі складають 7,5 тис.грн., а в овочівництві – 4,8 тис.грн., вихід же валової продукції відповідно дорівнює 9,6 та 6,8 тис.грн.

Визначити оптимальні розміри галузей молочного скотарства та овочівництва, які забезпечували б виробництво валової продукції на суму, не меншу 900 тис.грн. при мінімальних виробничих витратах та з урахуванням того, що умови господарювання дозволяють утримувати корів – в межах 65-90 голів.

Приклад 9.

Розрахувати оптимальні розміри тваринницьких підгалузей у господарстві, якщо відомо, що загальні витрати у галузі не можуть перевищувати b_1 тис.грн, прямі затрати праці можуть бути не більше 11700 люд.-днів, а витрати кормів – не більше 19200 ц.к.од. Норми витрат виробничих ресурсів і виходу продукції в розрахунку на одиницю виміру галузі наведені в табл. 9.

Таблиця 9.

Показники	Структурна корова	Свиноматка	Вівцематка
Загальна сума витрат	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Прямі затрати праці, люд.-дні	70	60	6
Витрати кормів, ц.к.од.	80	100	10
Валова продукція, тис.грн.	c_1	c_2	c_3

Оптимальні розміри галузі повинні забезпечувати максимум виробництва валової продукції.

Завантаження обладнання

Приклад 10.

Три види деталей обробляються на двох станках. Нормативи часу на одну деталь у хвиликах наведені в табл.10

Таблиця 10.

Станки	Види деталей		
	А	В	С
токарний	16	12	18
фрезерний	24	28	28

Необхідно скласти такий план завантаження станків, при якому буде забезпечуватися максимальний випуск продукції у кількісному вимірі, якщо відомо, що тривалість роботи першого станка планується b_1 , а другого – b_2 годин.

8. Завантажте програму-браузер, встановлену на Вашому ПК.
9. Знайдіть інформацію щодо існуючих математичних моделей агробіопроцесів, розроблених науковцями. Продумайте як сформулювати пошуковий запит.
10. Проаналізуйте знайдений матеріал. Визначте, які, на Вашу думку, математичні моделі мають найбільшу практичну цінність.

11. На основі знайденої інформації у мережі Internet, складіть невеликий перелік математичних моделей агробіопроектів і оформіть його з нової сторінки файлу *laboratorna_1*.
12. У всесвітній мережі Інтернет знайти інформацію про існуючі комп'ютерні програми та системи для моделювання та прогнозування стану довкілля.
13. На основі знайденої інформації, складіть невеликий перелік математичних програм (комплексів) і оформіть його з нової сторінки файлу *laboratorna_1.docx*.
14. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_1.docx*. Завершіть роботу з програмними засобами.
15. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, роздрукований на принтері результуючий документ *laboratorna_1.docx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Наведіть визначення поняття «модель».
2. Розкрийте суть поняття «математична модель».
3. Визначення системи.
4. Вкажіть основні особливості будь-якої системи.
5. Наведіть класифікацію математичних моделей.
6. Що розуміють під моделюванням?
7. Назвіть етапи моделювання.
8. Значення використання математичних моделей в екології.

9. Назвіть основні типи моделей у сільськогосподарському виробництві.
10. Наведіть приклад використання математичної моделі агробіопроцесів.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агrobiопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. - М.: Агропромиздат, 1990.
4. Гладкий А. В. Основи математичного моделювання в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
5. Кравченко Р. Г. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства / Р. Г. Кравченко, И. Г. Попов, С. З. Толпекин. – М.: Колос, 1973. – 527 с.
6. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
7. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
8. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. [Навч.посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
9. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.
10. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Б. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 2. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОМУ ВИРОБНИЦТВІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

Тема: Загальна постановка та розв'язування оптимізаційних задач сільськогосподарського виробництва за алгоритмами графічного та симплексного методу

Мета: Навчитися здійснювати постановку та математичне формулювання оптимізаційних задач сільськогосподарського виробництва, розв'язувати задачі лінійного програмування графічним способом та за алгоритмом симплекс-методу

Завдання:

1. Засвоїти особливості математичних моделей задач лінійного програмування.
2. Здійснити математичне формулювання оптимізаційних задач ведення екологобезпечного сільськогосподарського виробництва.
3. Опанувати алгоритм розв'язання ЗЛП графічним способом.
4. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі за алгоритмом симплекс-методу.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка, персональний комп'ютер, де встановлено текстовий процесор Microsoft Word.

Короткий теоретичний коментар

У виробничій практиці поширеними є задачі оптимізації, коли за умови обмежених ресурсів необхідно досягти певного екстремального значення розвитку певної системи. За звичай, залежності між результируючим фактором та фактоорною ознакою виражаються нелінійними функціями, що ускладнює процес пошуку розв'язку задачі. Як правило, для спрощення розв'язання, більшість таких оптимізаційних задач відносять до задачі лінійного програмування.

Суть задачі лінійного програмування (ЗЛП) полягає в наступному. Задані система m лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

і лінійна цільова функція

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{2.2}$$

відносно цих же n невідомих.

При цьому на значення невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ (їх ще називають змінними), накладається умова їх невід'ємності, тобто

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \tag{2.3}$$

Необхідно знайти таку сукупність значень n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що задовольняє умовам системи обмежень (2.1), невід'ємності (2.3), для якої цільова функція (2.2) набуває екстремального значення ($\max$ або $\min$).

Скорочено у математичному вигляді основну задачу ЛП записують так:

$$\text{знайти } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr} \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix}$$

$$\text{за наступних обмежень } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{та невід'ємності змінних } x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в симетричній та несиметричній формі.

Щодо розв'язання задач лінійного програмування, то на сьогодні існують розроблені методи для їх розв'язання. Задача ЛП, представлена в *симетричній формі*, найчастіше всього розв'язується *симплекс-методом*. Для розв'язання задачі, представленої в *несиметричній формі* використовується *симплекс-метод зі штучним базисом (М-метод)*. Якщо в задачі ЛП наявні лише дві чи три основні змінні, то вона може бути розв'язана *графічним способом*.

Порядок і методика виконання завдань

I. Засвоїти особливості математичних моделей задач лінійного програмування.

Пошук найкращого (оптимального) рішення, коли результати мають бути отримані за найменших витрат ресурсів визначеного виду або коли за даних обмежених ресурсів слід виробити найбільшу кількість певного продукту – одна з задач, що повсякчас постають перед людиною. Завдяки сучасній математизації різних галузей з'явилася можливість розв'язувати подібні задачі за допомогою створених оптимізаційних моделей.

Скорочено у математичному вигляді основну задачу ЛП записують так:

$$\text{знайти } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr} \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix}$$

за наступних обмежень $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$

та невід'ємності змінних $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Особливості математичних моделей задач лінійного програмування – цільова функція і функції, що моделюють обмеження – є лінійними.

2. Здійснити математичне формулювання оптимізаційних задач ведення екологобезпечного сільськогосподарського виробництва

Для виконання завдання слід переглянути запропоновані задачі основних груп економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві та продумати які можуть бути в них обмеження для забезпечення раціонального господарювання та збалансованого розвитку агроєкосистем.

Далі уважно прочитати умову кожної запропонованої задачі та здійснити її математичне формулювання, дотримуючись загальної постановки задач лінійного програмування:

- визначити, що є шуканими змінними;
- записати цільову функцію;
- з'ясувати, які ресурси є обмеженими для досягнення мети та, відповідно, скласти формули обмежень;
- увести в задачу умову невід'ємності змінних.

Поміркувати, як змінити цільову функцію чи які обмеження можна ввести в окремі задачі, щоб забезпечити ведення екологобезпечного сільськогосподарського виробництва.

Так, наприклад, у задачах оптимізації посівних площ, агротехнічні вимоги щодо впровадження науково-обґрунтованої сівозміни подаються обмеженнями, га:

- площа зернових культур може бути в межах 60 % усієї посівної площі;
- насичення сівозміни озимою пшеницею рекомендоване в межах 20-30 % усіх культур;
- площа ячменю ярого повинна складати 10 % посівної площі господарства;
- оскільки насичення сівозмін горохом понад 10 % призводить до істотного зниження його врожайності, а понад 20-30 % - до зниження

врожайності усіх зернових культур то площа посіву гороху має знаходитися в межах 10 % площі посіву культур;

- насичення сівозміни просапними культурами дозволяється до 40 %;
- площа посіву кукурудзи на зерно має знаходитися в межах 20 % посівної площі;
- площа технічних культур може бути в межах 10 % усієї посівної площі господарства;
- площа соняшнику для зони Лісостепу допустима в межах 10 % загальної площі посіву;
- насичення сівозміни кормовими культурами з метою збалансованості кормового раціону має бути не менше, ніж 30 %;
- багаторічні бобові трави для підвищення родючості ґрунтів мають становити не менше 50 % посівів у кормовій групі (без коренеплодів);
- площа багаторічних трав на насіння має займати не більше 3 % загальної площі ріллі
- насичення сівозміни зайнятими парами

Окрім цього, у задачах щодо оптимізації рослинництва додаються обмеження за балансом поживних речовин (азоту, рухомого фосфору, калію), обмеження за забезпеченням ерозійного фону земель, (за ерозійною небезпекою сівозмін) тощо.

В організації та плануванні галузей тваринництва важливе значення має *оптимальна структура стада*, тобто з зоотехнічної та економічної точки зору найбільш ефективно співвідношення окремих статевих та вікових груп тварин. Відомо, що від структури стада в значній мірі залежать розширене відтворення на фермах, інтенсивність використання маточного поголів'я, об'єм виробництва продукції та її собівартість, кількість продукції в розрахунку на одиницю худоби, кількість необхідних кормів, господарчих будівель та ін. Структура стада кожного конкретного господарства залежить від його виробничої направленості, від породного складу стада, від системи його відтворення, від плодovitості маток та тривалості вирощування молодняку, від строків вирощування молодняку, від термінів виробничого використання маточного поголів'я, від умов годівлі та утримання тварин. Взаємозв'язок перелічених факторів дозволяють врахувати методи лінійного програмування, щої обумовлює найефективнішу структуру стада в господарствах

При оптимізації стада ВРХ вводяться обмеження:

- сума статевовікових груп (корови; бики племінники; нетелі; бички у віці до 6 місяців; телички у віці до 6 місяців; бички у віці від 6 до 12 місяців; телички у віці від 6 до 12 місяців; бички у віці 12 – 18 місяців; телички у віці 12 – 18 місяців; дорослі тварини на відгодівлі) повинна бути рівною 1.

- число нетелів повинне бути більше або дорівнює числу корів, необхідних для розширення стада.
- раціональне співвідношення молодняку до 6-ти місячного віку та маткового поголів'я;
- поголів'я молодняку в молодших групах повинне бути більше, ніж у старших
- співвідношення ділового виходу молодняку статевовікових груп;
- зв'язок маткового поголів'я і ремонтного молодняку старших груп;
- співвідношення між теличками та бичками у віці до 6 місяців тощо.

Для ефективного розвитку тваринництва важливе місце займають *задачі оптимізації раціонів*. При складанні раціоні годівлі слід розрахувати такий вміст компонентів у раціоні, щоб забезпечити фізіологічну потребу тварин у поживних речовинах і мікроелементах при мінімальній вартості раціону. Причому, задачі складаються для кожної групи тварин окремо, в залежності від норм, забезпечуючи:

- збалансованість кормового раціону за вмістом поживних речовин і перетравного протеїну; мікроелементів;
- забезпечення потреби і норм у кожній групі кормів окремо (грубих, соковитих, концентрованих);
- нормативний вміст окремих інгредієнтів (сіно, силос тощо) у раціоні тощо.

Для раціональної організації сільськогосподарського виробництва та поліпшення використання техніки дуже важливе значення має планування оптимального забезпечення господарств необхідною сільськогосподарською технікою. Велика кількість факторів, що впливають на результати її використання, вимагає визначення *оптимальної структури машино-тракторного парку*. Один і той самий тип машин може мати різні конструкторські рішення і характеризуватися різною економічністю роботи. У зв'язку з цим слід підбирати такі типи тракторів, машин та інших знарядь, які максимально відповідали б агротехнічним вимогам і були найбільш вигідними в умовах конкретного господарства, району чи регіону

Моделі оптимального поєднання галузей на сільськогосподарських підприємствах дозволяють поєднати та здійснити комплексну оптимізацію роботи усіх галузей. Визначення оптимального поєднання галузей є однією з найважливіших задач діяльності підприємств та дозволяє досягти гаспупних ефектів: економічного (збільшення прибутку, валової продукції або зниження витрат виробництва); соціального (організація зайнятості сільського населення, підвищення добробуту працівників) та агроекологічного (покращення структури ґрунтів, їх агрофізичного та фіто санітарного стану, повітряного та водного режимів, позитивного балансу гумусу, розвиток біогенних елементів, екологічних характеристик виробленої продукції).

3. Опанувати алгоритм розв'язання ЗЛП графічним способом.

Слід пригадати етапи розв'язання задач лінійного програмування графічним способом. З'ясувати особливі випадки, що можуть мати місце при розв'язанні ЗЛП графічним способом.

Використовуючи алгоритм графічного способу, слід поетапно розв'язати запропоновані задачі та сформулювати відповідь.

Основні етапи розв'язання графічним способом задачі ЛП з двома змінними.

1. Будуємо графічне зображення області допустимих розв'язків згідно обмежень задачі у вибраній системі координат (x_1, x_2) .
2. Будуємо вектор $\bar{c}(c_1, c_2)$, що називається вектором-градієнтом, який вказує напрям найшвидшого досягнення точки оптимуму.
3. Будуємо лінію рівня цільової функції $Z = f(x_1, x_2)$, де функція Z приймає сталі значення.
4. Знаходимо розв'язок відповідної ЗЛП з використанням наявних графічних даних. Розв'язок ЗЛП лежить у вершині або на ребрі області допустимих розв'язків.
5. Визначаємо координати точки (точок) максимуму (мінімуму) і обчислюємо значення цільової функції в точці (точках).

4. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі лінійного програмування (ЗЛП) за алгоритмом симплекс-методу. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі за алгоритмом симплекс-методу

Повторити алгоритм розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом.

Розв'язати запропоновані задачі за вказаним алгоритмом. Симплекс-таблиці для розв'язання задач створити у електронних таблицях Microsoft Excel. Всі необхідні формули в чарунки Excel ввести з клавіатури, за потреби здійснивши абсолютні посилання на певні чарунки.

АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ В СЛОВЕСНО-ФОРМУЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ:

1. Умову задачі записати у вигляді цільової лінійної функції (2.1) та системи лінійних відношень (2.2).
2. Привести умову до канонічного виду, який передбачає перетворення тих з обмежень системи (2.2), що містять знак " $\leq$ " в обмеження, що містять знак " $=$ ". Це перетворення досягається шляхом введення в кожне обмеження, що містить знак " $\leq$ ", відповідної допоміжної змінної $x_{n+1}, x_{n+2} \dots$. Кількість допоміжних змінних при записі умови задачі в канонічному вигляді відповідає кількості обмежень, у яких був знак " $\leq$ ". Допоміжні змінні вводяться й у цільову функцію (2.1), але з нульовими коефіцієнтами (оцінками).

3. Записати опорний план розв'язку задачі у вигляді першої симплекс-таблиці (СТ), загальний вигляд якої та принципова схема наведені у таблицях 1 і 2.

Загальний вигляд СТ

<i>I</i>	<i>B</i>	$C_i \backslash C_j$	<i>B_i</i>	Коефіцієнти при змінних у цільовій функції	b_i / a_{ij}^*
				Шатка матриці – усі змінні системи	
Номер рядка таблиці	Базисні змінні	Коефіцієнти цільової функції при базисних змінних	Вільні члени обмежень (результуючий стовпчик)	Коефіцієнти при невідомих в обмеженнях	Відношення для визначення розв'язу зуючого рядка
<i>m</i> +1	Z_j		Значення цільової функції	Цільовий рядок	

Схема заповнення першої СТ

<i>i</i>	<i>B</i>	$C_i \backslash C_j$	<i>B_i</i>	C_1	C_2	...	C_n	0	0	...	0	b_i / a_{ij}^*
				x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	
1	x_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	
2	x_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	a_{ij}	...	...	...	...	...	
<i>m</i>	x_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	
<i>m</i> +1	Z_j		0	$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0	0	...	0	

4. Перевірити план на оптимальність. Умовою оптимальності розв'язання стандартної задачі лінійного програмування є відсутність в *m*+1-му рядкові в стовпчиках $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ від'ємних чисел. Якщо умова оптимальності виконується, то перейти до п.14 алгоритму.

При невиконанні умови оптимальності необхідно перевірити, чи має задача розв'язок. Якщо в *m*+1 рядку є хоча б один від'ємний елемент, якому відповідає стовпець з недодатніми елементами, то цільова функція в області допустимих значень змінних необмежена. Якщо умова не виконується, то слід продовжити розв'язання задачі, перейшовши до п.5 алгоритму.

5. Визначити розв'язуючий (дозволяючий, ключовий) стовпчик симплекс-таблиці. В зв'язку з тим, що задача розв'язується на максимум, то таким буде стовпчик, якому відповідає найменше від'ємне число серед елементів індексного рядка. Елементи розв'язуючого стовпчика в рядках 1, 2, ..., *m* позначаються через a_{ij}^* .

6. Розрахувати відношення b_i / a_{ij}^* , записавши їх в останній стовпчик СТ.

7. По найменшому з відношень b_i / a_{ij}^* , визначити розв'язуючий (дозволяючий, ключовий) рядок СТ.

8. Визначити розв'язуючий (дозволяючий, ключовий) елемент СТ. Він стоїть на перетині розв'язуючих рядка і стовпчика a_{rk}

9. Побудувати нову СТ. Її розміри такі, як і розміри попередньої СТ.
10. Визначити початковий рядок нової СТ, номер якого та місце розташування відповідає номеру та місцю розташування розв'язуючого рядка попередньої СТ. В базис початкового рядка нової СТ записується та змінна, яка була в розв'язуючому стовпчику попередньої СТ; оцінка ж цієї змінної заноситься в сусідній стовпчик $C_i \setminus C_j$.
11. Обчислити елементи початкового рядка нової СТ за формулою

$$a'_{pj} = a_{rj} / a_{rk} \quad (2.4)$$

<i>Елемент початкового рядка нової СТ</i>	=	<i>Відповідний елемент розв'язуючого рядка попередньої СТ</i> <i>Розв'язуючий елемент попередньої СТ</i>
---	---	---

12. Обчислити елементи інших рядків нової СТ, у тому числі й елементи індексного рядка, за правилом трикутника

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a'_{pj} \quad (2.5)$$

<i>Елемент нової таблиці, що стоїть не в початковому рядку</i>	=	<i>Елементу попередньої таблиці, що стоїть на тому ж місці, для якого розраховується елемент нової таблиці</i>	-	<i>Елемент розв'язуючого стовпчика попередньої таблиці того рядка, для якого розраховується елемент нової таблиці</i>	×	<i>Елемент початкового рядка нової СТ з того стовпчика, для якого розраховується елемент нової таблиці</i>
--	---	--	---	---	---	--

13. Перейти до п.4 алгоритму
14. Записати розв'язок і проаналізувати результат при виконанні умови оптимальності.
 У стовпчику B_i знаходяться оптимальні значення базисних змінних і максимум цільової функції.
15. Перевірити, чи є оптимальний план єдиним, чи їх існує безліч. Для цього необхідно перевірити чи є у $m+1$ рядку нульові значення в стовпчиках тих змінних, що не ввійшли в базис оптимального розв'язку. Якщо немає, то розв'язок єдиний, якщо є, то розв'язків нескінченна множина.

5. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_2.docx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і методика щодо їх виконання

1. Пригадайте основні групи економіко-математичних моделей у сільсько-господарському виробництві.
2. Перегляньте оптимізаційні задачі аграрного виробництва, наведені в лабораторній роботі № 1.
3. Здійсніть математичне формулювання (запишіть систему обмежень та цільову функцію) щойно розглянутих задач.
4. Завантажте текстовий процесор Microsoft Word. У новому документі наведіть моделі задач, поданих у лабораторній роботі 1.
5. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_2.docx* та завершіть роботу з програмними засобами.
6. Здійсніть математичне формулювання та складіть модель запропонованої задачі

Приклад 1.

Розрахувати оптимальний план розподілу біологічних і мінеральних добрив у підприємстві під посів двох сільськогосподарських культур – озимої пшениці та кукурудзи на зерно так, щоб отримати максимальний приріст валового збору зерна за рахунок внесення добрив. Під вирощування продовольчих культур виділено 690 га ріллі та 160,3 тис.грн. на закупівлю мінеральних та біологічних добрив. В якості азотних добрив заплановано використати селітру, ціна якої 3 330 грн/т, а в якості біологічних добрив – ризоентерін під озиму пшеницю і флавобактерін під кукурудзу. У зв'язку з тим, що господарство переводимо га альтернативні технології землеробства, то плануємо максимально використати можливості біопрепаратів і тільки залишковий негативний баланс азоту компенсувати за рахунок мінеральних добрив. Додаткові дані щодо норм внесення добрив, дефіциту азоту біопрепаратів, вартість біологічних добрив та прибавка врожаю культур наведені в табл. 10.

Таблиця 10.

№ з/п	Показники	Культури	
		озима пшениця	кукурудза на зерно
1	Норми внесення азотних добрив, кг діючої речовини на 1 га	60	90
2	Заощадження від застосування біопрепаратів, кг/га діючої речовини азотних добрив	44	58
3	Вартість однієї нектарної норми біодобрив, грн	30	34
4	Приріст врожайності культур, ц/га	7,4	12,7

Необхідно врахувати також, що для покриття власних потреб господарству потрібно вирощувати не менше 200 га кукурудзи.

Математичне формулювання:

Нехай, x_1 – площа посіву озимої пшениці, під яку вносяться добрива, га
 x_2 – площа посіву кукурудзи на зерно, під яку вносяться добрива, га

Як вказано в умові, біологічні добрива забезпечують дефіцит азоту під пшеницю та кукурудзу відповідно у кількості 44 та 58 кг/га діючої речовини, а залишковий негативний баланс азоту будемо забезпечувати за рахунок аміачної селітри.

Якщо врахувати, що в селітрі 30 % діючої речовини, то:

- вартість необхідно кількості мінеральних добрив під 1 га пшениці:

$$\frac{3330}{1000 \cdot 0,3} (60 - 44) = 177,6 \text{ грн/га, де}$$

$$\frac{3330}{1000} \cdot \frac{100 \%}{30 \%} = \frac{3330}{1000 \cdot 0,3} \quad \text{– необхідна кількість аміачної селітри на 1 га}$$

враховуючи те, що діюча речовина складає 30% негативний баланс азоту після застосування різоентерину

$$(60 - 44) -$$

- вартість необхідно кількості мінеральних добрив під 1 га кукурудзи:

$$\frac{3330}{1000 \cdot 0,3} (90 - 58) = 355,2 \text{ грн/га, де}$$

$$\frac{3330}{1000} \cdot \frac{100 \%}{30 \%} = \frac{3330}{1000 \cdot 0,3} \quad \text{– необхідна кількість аміачної селітри на 1 га}$$

враховуючи те, що діюча речовина складає 30% негативний баланс азоту після застосування флавобактерину

$$(90 - 58) -$$

Тоді обмеження та цільова функція матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 690 && \text{за обсягом відведеної ріллі} \\ (177,6 + 30)x_1 + (32,2 + 34)x_2 &\leq 160300 && \text{за вартістю добрив} \\ x_2 &\geq 200 && \text{за площею під кукурудзу} \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 && \text{невід'ємність шуканих змінних} \\ Z = 7,4x_1 + 12,7x_2 &\rightarrow \max && \text{приріст валового збору зерна з шуканих площ.} \end{aligned}$$

7. Сформулюйте алгоритм розв'язання задач лінійного програмування графічним способом. Опишіть випадки, коли задача лінійного програмування не має розв'язків.
8. Розв'яжіть наведені нижче задачі лінійного програмування графічним способом.

Приклад 2.

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Приклад 3.*Обмеження задачі:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Приклад 4.*Обмеження задачі:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

Приклад 5.*Обмеження задачі:*

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Приклад 6.

Відповідно до сівозмін, під вирощування пшениці та ячменю у господарстві може бути відведено 100 га ріллі та 600 люд.-дні. Витрати праці на 1 га пшениці 4 люд.-дн., ячменю – 5 люд.-дн. Урожайність обох культур планується у розмірі 30 ц/га.

Знайти оптимальні площі посіву зернових культур, щоб забезпечити максимальний валовий збір зерна. Врахувати, що для власних потреб господарству необхідно не менше 750 ц пшениці та не менше 600 ц ячменю.

9. Складіть моделі та розв'яжіть наведені нижче задачі лінійного програмування вручну за алгоритмом симплекс-методу.

Приклад 7.

Під вирощування озимих зернових та кукурудзи на зерно у господарстві може бути відведено 1000 га ріллі та 8000 люд.-днів. Затрати праці на 1 га озимих становлять 4 люд.-дн., кукурудзи – 20 люд.-дн. Урожайність культур планується відповідно у розмірі 35 та 50 ц/га.

Знайти оптимальні площі посіву зернових культур, щоб забезпечити максимальний валовий збір зерна.

Симплекс-таблиці:

i	B	$C_i \backslash C_j$	B_i					b_i/a_{ij}^*
				x_1	x_2	x_3	x_4	
1								
2								
$m+1$	Z_j							
1								
2								
$m+1$	Z_j							
1								
2								
$m+1$	Z_j							

Приклад 8.

Визначити оптимальний склад автопарку для забезпечення максимального обсягу транспортних робіт (у т-км), за умов, що загальна кількість автомобілів не повинна перевищувати 11 штук, а автомобілів ГАЗ – не більше 9 штук. Річні витрати по експлуатації автопарку повинні знаходитися в межах 40 тис.грн.

Запланований обсяг виконання тонно-кілометрів за рік, експлуатаційні витрати по кожній марці автомобілів наведені в таблиці

Показники	Марки автомобілів		
	ГАЗ – 3309	ГАЗ – 3307	КАМАЗ – 4308
Виробіток, тис.т-км	42	45	50
Експлуатаційні витрати, грн.	3000	3500	5000

Симплекс-таблиці:

i	B	$C_i \backslash C_j$	B_i							b_i/a_{ij}^*
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1										
2										
3										
$m+1$	Z_j									
1										
2										
3										
$m+1$	Z_j									

1										
2										
3										
$m+1$	Z_j									
1										
2										
3										
$m+1$	Z_j									

10. Запишіть висновки до задач та в поза аудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, роздрукований на принтері результуючий документ *laboratorna_2.docx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Розкрийте суть оптимізаційних задач.
2. Що називають системою обмежень в ЗЛП?
3. Якого вигляду може набувати цільова функція у ЗЛП?
4. Поясніть умову невід'ємності змінних.
5. Наведіть приклади оптимізаційних задач.
6. Алгоритм розв'язання задачі графічним способом.
7. Сформулюйте задачу лінійного програмування, яка може бути розв'язана симплекс-методом.
8. Сформулюйте основні етапи стандартної ітерації симплекс-методу.

9. Який елемент симплекс-таблиці є розв'язуючим?
10. За яких умов знайдений оптимальний план є єдиним?

Список рекомендованої літератури:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л.Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Браславец М.Е. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / М.Е.Браславец, Р.Г.Кравченко. – М.: Колос, 1972. – 589 с.
3. Волков В. А. Элементы линейного программирования / В.А. Волков. – М.: Просвещение, 1975. – 140 с.
4. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. - М.: Агропромиздат, 1990.
5. Калініченко А.В. Використання оптимального програмування при розв'язанні задач сільськогосподарського виробництва / А.В.Калініченко, К.Д.Костоглод, Н.М.Протас. – Полтава: Видавництво “ІнтерГрафіка”, 2004. – 101 с.
6. Курносов А.П. Вычислительная техника и экономико-математические методы в сельском хозяйстве / А.П. Курносов, А.П. Сысоев. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 301 с.
7. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я.Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

Тема: Розв'язування задач лінійного програмування сільсько-господарського виробництва за алгоритмом симплекс-методу у процесорі Microsoft Excel

Мета: Навчитися розв'язувати прикладні задачі лінійного програмування (ЗЛП) у процесорі Microsoft Excel за алгоритмом симплекс-методу

Завдання:

1. Пригадати основні принципи та етапи роботи по створенню електронних таблиць у Microsoft Excel.
2. Відпрацювати процедуру введення вхідних даних симплекс-таблиць у чарунки Excel.
3. Засвоїти алгоритм розв'язання задач лінійного програмування за алгоритмом симплекс-методу у табличному процесорі.
4. Навчитися здійснювати економічну інтерпретацію допоміжних змінних і розв'язку задачі.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка, персональний комп'ютер, де встановлено табличний процесор Microsoft Excel.

Короткий теоретичний коментар

Симплексним методом можна розв'язати задачу, умова якої в математичному вигляді записується у симетричній формі. Задача, записана у несиметричній формі розв'язується за алгоритмом М-методу.

Зменшити витрати часу на розрахунки можна, використовуючи можливості сучасних ПК. Зокрема, знаючи алгоритми відповідних методів, задачу можна розв'язати у поширеному табличному процесі Microsoft Excel.

Розв'язання задачі починається із побудови її моделі. Далі задача лінійного програмування зводиться до канонічного вигляду. Лише після цього у табличному процесорі Microsoft Excel створюється симплекс-таблиця, куди заносяться вихідні дані. Далі – у відповідних чарунках електронних таблиць прописуються формули для розрахунку.

Надалі вся робота по розв'язанню задачі виконується поетапно, відповідно до алгоритму симплекс-методу чи М-методу, доки не буде досягнуто оптимального плану, або ж можна буде зробити висновок, що розв'язку не має.

Порядок і методика виконання завдань

1. Пригадати основні принципи та етапи роботи по створенню електронних таблиць у Microsoft Excel.

Табличний процесор Microsoft Excel широко використовується для виконання різноманітних техніко-економічних розрахунків. Excel призначений для автоматизації проведення різноманітних розрахунків, аналізу і представлення статистичної, фінансової, економічної та іншої інформації. Вона складається з таблиць, в яких безпосередньо можна проводити калькуляції. Excel також дозволяє вводити та формувати текстову інформацію для оформлення документації, підтримує обробку, вибірку та фільтрацію даних, що задані у вигляді списку (база даних).

Для створення нового табличного документу слід обрати команду **Файл⇒Создать**.

Технологія створення таблиць у Excel:

- увести назву таблиці;
- ввести вхідні дані;
- увести необхідні формули для розрахунків;
- відформатувати таблицю – задати рамки, при потребі – забарвлення чарунк, формат виведення даних;
- зберегти результати роботи, задавши назву та місце збереження файлу.

2. Відпрацювати процедуру введення вхідних даних симплекс-таблиць у чарунки Excel

Введення вхідних даних відбувається безпосередньо із клавіатури. У чарунки табличного процесора Excel можна занести дані основних трьох типів:

Текстовий – рядок будь-яких символів довільної довжини. Після закінчення вводу і переходу до другої чарунки дані текстового типу автоматично вирівнюються по лівому краю.

Числовий – числа, а також дати та дані в грошовому форматі. Дані числового типу вирівнюються по правому краю.

Формули – запис, по якому здійснюється розрахунок. Формула завжди розпочинається з символу рівності "=" і являє собою арифметичний вираз, тобто набір операндів (чисел і посилань на чарунки) з'єднаних знаками математичних операцій та функцій.

У формулах в основному дії виконуються з даними числового типу і результати розрахунків також мають числовий тип за виключенням логічних функцій та деяких спеціальних функцій обробки тексту.

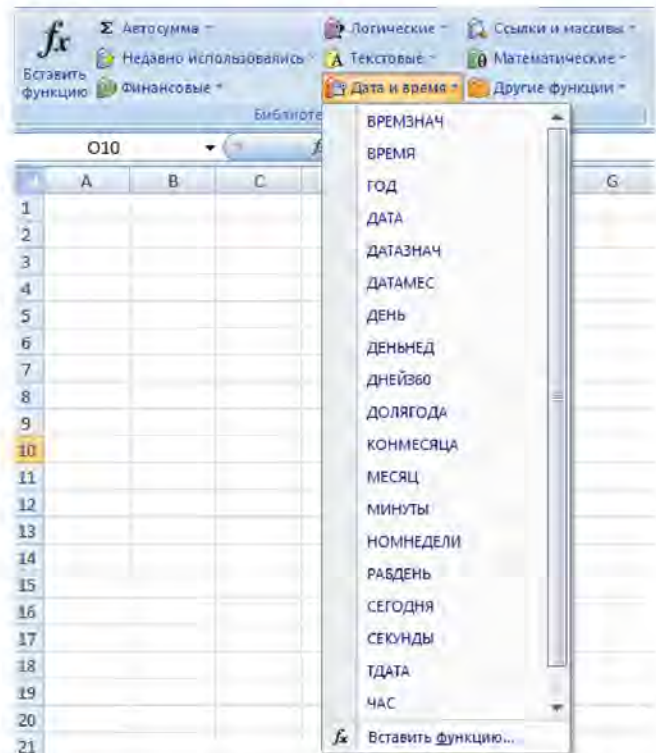
Формули можна внести за технологією ручного проведення розрахунків – із клавіатури записати формулу, наприклад,

=A5*B7

=C10-E10+K10.

=M10/K10*100

Також Excel має ряд вбудованих функцій для виконання обчислень. Причому, Excel дозволяє виконувати підрахунки не лише з числами. Програма містить ряд вбудованих функцій для роботи з текстовими функціями, функціями дати/часу, обробки масивів тощо. Доступ до них здійснюється за командою **Формулы⇒Вставить функцію** (**Вставка⇒Формула**).



У Microsoft Excel для забезпечення можливості автоматизації при копіюванні формул передбачені різні види посилань на чарунки з даними, є адресал спеціальних надбудов для виконання аналізу даних, пошуку оптимальних рішень, дослідження сценаріїв розвитку та прогнозування.

В Excel розрізняють три типа посилань у формулах:

1) **відносні** – які не містять ніяких додаткових позначень (наприклад, C5 або діапазон A5:E12); при копіюванні формули такі посилання автоматично змінюються у відповідності зі зміщенням;

2) **абсолютні** – в яких перед позначеннями стовпчика та рядка додається знак «\$» (наприклад, \$C\$5 або діапазон \$A\$5:\$E\$12); при копіюванні формули такі посилання залишаються в ній постійними, фіксованими (якщо чарунка або їх діапазон мають власне ім'я, то при використанні в формулі таке ім'я також є абсолютним посиланням);

3) **змішані** – в яких може бути зафіксований лише стовпчик або лише рядок (наприклад, \$C5 або діапазон A\$5:E\$12); в даному випадку при копіюванні формули ті маркери рядків і стовпчиків, перед якими стоїть знак «\$» залишаються в формулі постійними, а без нього – змінюються.

При створенні формули автоматично вводяться відносні посилання. У разі необхідності можна задати абсолютні або змішані посилання за допомогою функціональної клавіші [F4].

3. Засвоїти алгоритм розв'язання задач лінійного програмування за алгоритмом симплекс-методу у табличному процесорі

Розв'язання задачі лінійного програмування із використанням програмних засобів, у тому числі й табличного процесора Microsoft Excel, починають із дослідження предметної області, постановки та математичного формулювання задачі, зведення задачі до канонічного вигляду шляхом введення допоміжних змінних.

Після побудови моделі задачі, необхідно:

- завантажити табличний процесор Microsoft Excel;
- побудувати структуру першої симплекс-таблиці;
- в окремі чарунки першої симплекс-таблиці ввести вхідні дані;
- обчислити значення $m+1$ (за потреби $m+2$) рядка за відповідними формулами алгоритму;
- перевірити план на оптимальність;
- якщо план неоптимальний, продовжити розв'язання задачі за алгоритмом симплекс-методу;
- визначити розв'язуючий стовпчик і зафарбувати його кольором;
- визначити відношення i за найменшим значенням – визначити розв'язуючий рядок (виділити його кольором);
- на перетині розв'язуючого рядка і стовпчика визначити розв'язуючий елемент;
- перейти до заповнення другої таблиці – для цього створити копію першої таблиці;
- у другій таблиці очистити її основні дані (крім перших чотирьох стовпчиків);
- у другій таблиці розрахувати елементи початкового рядка за формулою (2.4);
- у другій таблиці розрахувати всі інші елементи за формулою (2.5);
- перевірити план на оптимальність і продовжити розв'язання задачі згідно алгоритму СМ чи М-методу;
- завершити розв'язання задачі при виконанні умови опимальності.

4. Навчитися здійснювати економічну інтерпретацію допоміжних змінних і розв'язку задачі

Після розв'язання задачі в Excel, слід проаналізувати розв'язок.

До розв'язку задачі входять змінні, що занесені в базисний стовпчик останньої симплекс-таблиці. Розв'язок задачі занесений у стовпчику B_i симплекс-таблиці. Оптимальне значення цільової функції теж знаходиться в цьому ж стовпчику на перетині з $m+1$ індексним рядком.

Якщо до розв'язку задачі ввійдуть допоміжні змінні, необхідно надати їм інтерпретацію. Значення допоміжних змінних, введених у канонічну форму задачі зі знаком +, означає обсяг недовикористаних (заощаджених) ресурсів. Якщо ж допоміжні змінні вводились зі знаком –, то їх значення характеризує надлишок (перебільшення) лімітую чого фактора.

5. *Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл laboratorna_3.xlsx.*

Завдання для практичного виконання, порядок і методика щодо їх виконання

1. Пригадайте, які задачі лінійного програмування можна розв'язати симплекс-методом (СМ).
2. Поясніть, як звести задачу до канонічного вигляду.
3. Пригадайте, чи завжди ЗЛП має розв'язок? За яких у симплекс-таблицях робиться висновок про необмеженість цільової функції в задачі?
4. Складіть модель та розв'яжіть запропоновану задачу сільсько-господарського виробництва на ПК у табличному процесорі Microsoft Excel за алгоритмом симплекс-методу за технологією ручного проведення розрахунків.

Приклад 1.

У господарстві було прийнято рішення відродити галузь птахівництва – вирощувати бройлерів, качок, гусей і індиків. Площа виробничих приміщень дозволяє утримувати не більше 6000 голів птиці, причому індиків – не більше 1000 голів. За рік затрати праці не можуть перевищувати 720 людино-днів; витрати комбікорму на годівлю птахів мають бути не більше 3500 ц; витрати соломи злакової для підстилки – не більше 1100 ц.

Вихідні дані на 1 гол. за рік наведені в таблиці

Показники	Птиця			
	бройлери	качки	гуси	індики
Затрати праці, люд.-дні	0,1	0,12	0,12	0,15
Витрати комбікорму, ц	0,4	0,65	0,56	0,7
Норми підстилки, ц	0,12	0,25	0,2	0,22
Вихід м'яса, кг	2,45	3,5	4	7,5

Встановити оптимальні розміри галузі птахівництва для отримання максимуму валової продукції (виходу м'яса).

5. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel.
6. Створіть симплекс-таблиці.

Для розв'язання задачі на ПК:

- На першому аркушу документу введіть у чарунку A1 текст СИМПЛЕКС-МЕТОД, а в чарунку A2 текст Перша симплекс-таблиця.
- Почергово об'єднайте діапазон чарунок A1:K1 та діапазон A2:K2.
- Починаючи з чарунки A3 створіть пустий бланк першої симплекс-таблиці для розв'язання задачі, в якій буде п'ять обмежень та дев'ять змінних (з яких 4 основні). Для проведення обрамлень скористайтесь кнопкою Границы стандартної панелі інструментів, або командою Формат⇒Ячейки (вкладка Границы).
- Скопіюйте діапазон A2:N10 у буфер обміну та вставте його тричі, починаючи з чарунок A11, A20, A29. Відредагуйте чарунки A11, A20, A29, щоб отримати готовий бланк для розв'язання усієї задачі за алгоритмом симплекс-методу.
- Надайте активному аркушу назву СМ-БЛАНК.
- Створіть копію аркушу СМ-БЛАНК. Аркушу з копією надайте назву відповідно СМ-Задача1
- Активізуйте аркуш СМ-Задача1. Виконайте потрібні дії в Excel для розв'язання задачі:
- Заповніть першу симплекс-таблицю, усі необхідні значення з умови задачі занесіть у відповідні клітинки (крім рядка $m+1$ та стовпчика b_i/a_{ij}^*). Для заповнення скористайтесь можливістю об'єднання клітинок
- Для заповнення $m+1$ рядка в клітинку E10 введіть формулу $=E3$, тобто задайте відповідний коефіцієнт цільової функції з протилежним знаком. Далі шляхом протягування за допомогою миші скопіюйте формулу на весь рядок. Якщо план не є оптимальний (в $m+1$ рядку присутні від'ємні елементи), то розрахуйте другу симплекс-таблицю.
- Знайдіть розв'язуючий стовпчик (найменше від'ємне значення у рядку $m+1$) і позначте його довільним кольором. Тепер заповніть стовпчик b_i/a_{ij}^* . Для цього в клітинку N5 введіть формулу $=D5/N5$. Далі шляхом протягування копіюємо формулу на весь стовпчик.
***Увага!** При діленні на нуль у клітинці буде виведено відповідне повідомлення. Таку клітинку, або клітинку з від'ємним значенням можна позначити хрестиком і у подальших обчисленнях її враховувати не слід.*
- Тепер знайдіть у заповненому стовпчику b_i/a_{ij}^* мінімальне значення. Виділіть даний рядок довільним кольором.
- Перейдіть до заповнення наступної симплекс-таблиці.
- Почніть заповнювати другу таблицю з початкового другого рядка. У чарунку D15 введіть формулу $=D6/\$H\6 . Далі скопіюйте формулу на весь рядок. Абсолютна адреса розв'язуючого елемента ($\$H\6) при копіюванні змінюватися не буде. Знак \$ перед позицією вказує на фіксування цієї позиції при копіюванні формули. Якщо знак \$ стоїть перед літерою, то фіксується стовпчик, а якщо перед цифрою – фіксується рядок.

Фрагмент симплекс-таблиці, оформленої в Microsoft Excel із використанням відповідних формул, наведений на рис.3.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Симплекс-метод										
2	Перша симплекс-таблиця										
3	i	B	Ci	Bi	2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
4		x1	0	6000	1	1	1	1	1	x6	x7
5	1	x6	0	1000	0	0	0	1	0	1	0
6	2	x7	0	720	0,1	0,12	0,12	0,15	0	1	1
7	3	x8	0	3500	0,4	0,65	0,56	0,7	0	0	0
8	4	x9	0	1100	0,12	0,25	0,2	0,22	0	0	0
9	m+1	Zj	0		=E3	=F3	=G3	=H3	=I3	=J3	=K3
10	Друга симплекс-таблиця										
11	i	B	Ci	Bi	2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
12		x1	0	=D5-\$H5*\$D\$15	=E5-\$H5*\$E\$15	=F5-\$H5*\$F\$15	=G5-\$H5*\$G\$15	=H5-\$H5*\$H\$15	=I5-\$H5*\$I\$15	=J5-\$H5*\$J\$15	=K5-\$H5*\$K\$15
13	2	x4	7,5	=D6-\$H6*\$D\$15	=E6-\$H6*\$E\$15	=F6-\$H6*\$F\$15	=G6-\$H6*\$G\$15	=H6-\$H6*\$H\$15	=I6-\$H6*\$I\$15	=J6-\$H6*\$J\$15	=K6-\$H6*\$K\$15
14	3	x7	0	=D7-\$H7*\$D\$15	=E7-\$H7*\$E\$15	=F7-\$H7*\$F\$15	=G7-\$H7*\$G\$15	=H7-\$H7*\$H\$15	=I7-\$H7*\$I\$15	=J7-\$H7*\$J\$15	=K7-\$H7*\$K\$15
15	4	x8	0	=D8-\$H8*\$D\$15	=E8-\$H8*\$E\$15	=F8-\$H8*\$F\$15	=G8-\$H8*\$G\$15	=H8-\$H8*\$H\$15	=I8-\$H8*\$I\$15	=J8-\$H8*\$J\$15	=K8-\$H8*\$K\$15
16	5	x9	0	=D9-\$H9*\$D\$15	=E9-\$H9*\$E\$15	=F9-\$H9*\$F\$15	=G9-\$H9*\$G\$15	=H9-\$H9*\$H\$15	=I9-\$H9*\$I\$15	=J9-\$H9*\$J\$15	=K9-\$H9*\$K\$15
17	m+1	Zj	0	=D10-\$H10*\$D\$15	=E10-\$H10*\$E\$15	=F10-\$H10*\$F\$15	=G10-\$H10*\$G\$15	=H10-\$H10*\$H\$15	=I10-\$H10*\$I\$15	=J10-\$H10*\$J\$15	=K10-\$H10*\$K\$15
18	Третя симплекс-таблиця										
19	i	B	Ci	Bi	2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
20		x1	0	=D14-\$G14*\$D\$27	=E14-\$G14*\$E\$27	=F14-\$G14*\$F\$27	=G14-\$G14*\$G\$27	=H14-\$G14*\$H\$27	=I14-\$G14*\$I\$27	=J14-\$G14*\$J\$27	=K14-\$G14*\$K\$27
21	2	x4	7,5	=D15-\$G15*\$D\$27	=E15-\$G15*\$E\$27	=F15-\$G15*\$F\$27	=G15-\$G15*\$G\$27	=H15-\$G15*\$H\$27	=I15-\$G15*\$I\$27	=J15-\$G15*\$J\$27	=K15-\$G15*\$K\$27
22	3	x7	0	=D16-\$G16*\$D\$27	=E16-\$G16*\$E\$27	=F16-\$G16*\$F\$27	=G16-\$G16*\$G\$27	=H16-\$G16*\$H\$27	=I16-\$G16*\$I\$27	=J16-\$G16*\$J\$27	=K16-\$G16*\$K\$27
23	4	x8	0	=D17-\$G17*\$D\$27	=E17-\$G17*\$E\$27	=F17-\$G17*\$F\$27	=G17-\$G17*\$G\$27	=H17-\$G17*\$H\$27	=I17-\$G17*\$I\$27	=J17-\$G17*\$J\$27	=K17-\$G17*\$K\$27
24	5	x9	4	=D18-\$G18*\$D\$27	=E18-\$G18*\$E\$27	=F18-\$G18*\$F\$27	=G18-\$G18*\$G\$27	=H18-\$G18*\$H\$27	=I18-\$G18*\$I\$27	=J18-\$G18*\$J\$27	=K18-\$G18*\$K\$27
25	m+1	Zj	0	=D19-\$G19*\$D\$27	=E19-\$G19*\$E\$27	=F19-\$G19*\$F\$27	=G19-\$G19*\$G\$27	=H19-\$G19*\$H\$27	=I19-\$G19*\$I\$27	=J19-\$G19*\$J\$27	=K19-\$G19*\$K\$27

- Усі інші рядки таблиці заповніть за правилом трикутника. Для цього у клітинку D14 введіть формулу $=D5-H5*D15$ і створіть її копію по всіх чарунках рядка. Далі скопіюйте цю формулу з чарунки D14 в чарунку D16 (там має з'явитися формула $=D7-H7*D15$) та аналогічно протягніть її по рядку, а потім, за допомогою маркера авто заповнення протягніть весь рядок вниз, аж до чарунки M19.
 - Таблиця заповнена. Тепер аналогічно описаному вище з'ясуйте чи є план оптимальним і при необхідності розрахуйте наступні симплекс-таблиці (їх має бути чотири).
7. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_3.xlsx*.
 8. Підведіть підсумки: сформууйте та у довідьну чарунку запишіть відповіді до задач.
 9. Надайте практичні рекомендації щодо оптимізації сільськогосподарського виробництва.
 10. Продемонструйте роботу викладачу, завершіть роботу з програмним засобом та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

У звіті по роботі має бути роздрукований на принтері результуючий документ Microsoft Excel *laboratorna_3.xlsx*, що отриманий після виконання завдань: зазначена тема роботи, умова задачі, математична модель задачі, розв'язок задачі, відповідь до задачі та практичні рекомендації.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію, маючи електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Для розв'язання яких задач використовується симплекс-метод?
2. Для розв'язання якого типу задач використовують М-метод?
3. Сформулюйте основні відмінності модифікованого симплекс-методу порівняно зі стандартним.
4. Сформулюйте критерій оптимальності плану, який застосовується в симплекс та М-методі.

5. Порядок створення таблиць в Excel для розв'язання фахових задач.
6. Якого типу дані можна вводити у чарунки Excel.
7. Технологія проведення розрахунків у табличному процесорі.
8. Назвіть категорії вбудованих функцій Excel.
9. Чи можна використати табличний процесор Microsoft Excel для розв'язання ЗЛП? Якщо відповідь так, то наведіть основні етапи розв'язання задач на ПК.
10. Які типи посилань використовуються у формулах при розв'язанні оптимізаційних задач в Excel за алгоритмом симплекс-методу за технологією ручного проведення розрахунків?

Список рекомендованої літератури:

1. Булига К. Б. Комп'ютерний практикум із застосуванням математичних методів в економіці / К. Б. Булига, В.М. Міхайленко. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 67 с.
2. Калініченко А. В. Використання оптимального програмування при розв'язанні задач сільськогосподарського виробництва / А.В.Калініченко, К. Д. Костоглод, Н. М. Протас. – Полтава: Видавництво “ІнтерГрафіка”, 2004. – 101 с.
3. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.
4. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов.– К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

Тема: Розв'язування у середовищі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения задач, що пов'язані з аграрним виробництвом й моделюються як задачі лінійного програмування

Мета: Навчитися використовувати засіб Поиск решения табличного процесора Microsoft Excel для розв'язування оптимізаційних задач

Завдання:

1. Засвоїти порядок введення вихідних даних у чарунки Excel для розв'язання ЗЛП із подальшим використанням засобу Поиск решения.
2. Опанувати технологію застосування надбудови Поиск решения табличного процесора Excel для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.
3. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі аграрного виробництва засобом Поиск решения Microsoft Excel та інтерпретувати результат.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка, персональний комп'ютер, де встановлено табличний процесор Microsoft Excel.

Короткий теоретичний коментар

Математичне моделювання процесів, явищ і конструкцій складних систем перетворилось в інструмент аналізу великої кількості задач, а імітація на ПЕОМ функціонування складних систем є практично єдиним способом швидкого розв'язання досліджуваних проблем.

Сучасний етап розвитку аграрної науки характеризується активним пошуком шляхів досягнення сталого розвитку аграрного виробництва при впровадженні нових технологій виконання робіт і управління процесом формування врожаю і т.ін. з врахуванням умови збереження навколишнього середовища. Тобто, виникають задачі оптимізації виробництва в межах єдиної економіко-еколого-соціальної системи.

Для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування розроблено ряд методів. Проте, всі вони потребують проведення складних математичних розрахунків. Більше того, збільшення кількості невідомих та введення кількох десятків обмежень в задачі, що описують реальні виробничі

процеси аграрної та інших галузей, зводить розв'язання оптимізаційних задач вручну на нівель. Тому для отримання оптимальних розв'язків доцільно використовувати можливості комп'ютерної техніки та відповідне програмне забезпечення. В такому разі від фахівців певної прикладної галузі (екологія, економіка, техніка тощо) не вимагається пам'ятати кроки алгоритмів відповідних математичних методів. Все, що потрібно вміти спеціалісту – здійснювати постановку задачі, скласти моделі, обирати програмні продукти серед наявних.

На сьогодні існує безліч програм для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування. Це – спеціальні пакети для математичних розрахунків, такі як MAPLE, Mathcad, MathLAB тощо. Багато програм є у вільному доступі в мережі інтернет. Розроблені сайти, що дозволяють виконувати математичні розрахунки.

На сьогодні більшість користувачів ПК користуються у своїй роботі пакетом прикладних програм загального призначення Microsoft Office (або Open Office). Табличний процесор Microsoft Excel дозволяє вирішувати широке коло математичних, статистичних і інших задач. До Excel звертаються в будь-якій ситуації, що вимагає роботи з цифрами. Цю програму можна однаково успішно використовувати як для обробки одного стовпчика з числами, так і для складання складної моделі бюджету. Крім того, за допомогою вбудованих в програму засобів можна ілюструвати цифри “виразними” діаграмами. Excel можна також використовувати в якості програми для ведення бази даних і створення стандартної форми для збору і реєстрації даних.

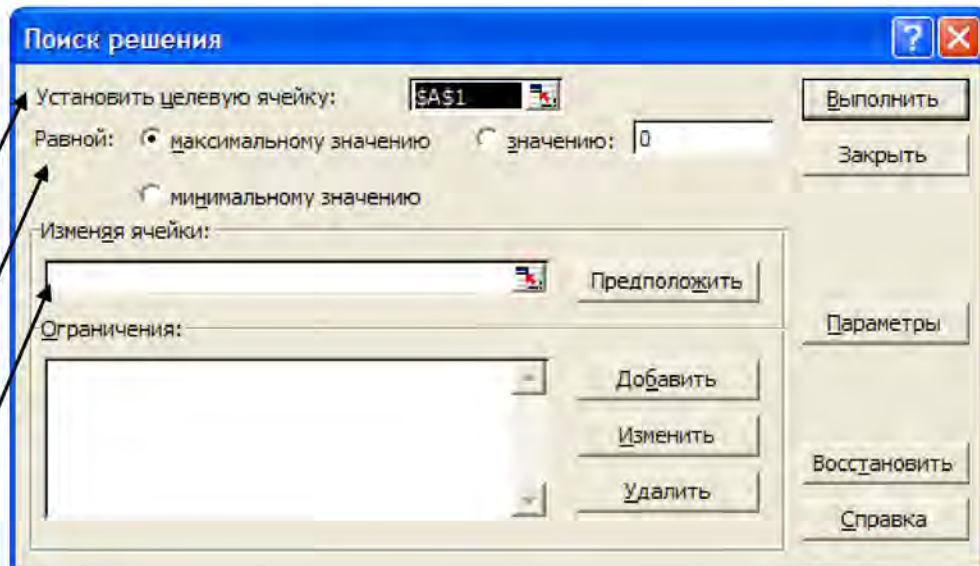
Excel надає можливість розв'язувати задачі лінійного та нелінійного програмування.

Не дивлячись на значну різноманітність оптимізаційних задач, MS Excel пропонує єдиний потужний інструмент для їх розв'язання – надбудову **Поиск решения (Solver)**. *Поиск решения дозволяє розв'язувати оптимальні задачі трьох типів – лінійні, нелінійні та цілочисельні.* Користувачу потрібно лише грамотно сформулювати задачу, а Excel знайде оптимальний розв'язок – найкращий варіант використання обмежених ресурсів, що забезпечить максимальне чи мінімальне значення функції цілі.

Щоб застосувати Поиск решения для розв'язання задачі, необхідно записати розв'язувану задачу в математичному вигляді, а потім – подати її в електронних таблицях у термінах табличного процесора – визначити змінювані комірки (комірки, відведені для шуканих змінних), визначити обмеження, що будуть враховуватись у процесі аналізу, та визначити цільову комірку (комірку із формулою цільової функції).

АЛГОРИТМ розв'язання задачі за допомогою ПОИСК РЕШЕНИЯ:

- в окремі чарунки ввести вхідні дані;
- відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
- в окрему чарунку записати формулу для лівої частини першого обмеження, а в іншу чарунку – значення правої частини першого обмеження (вільний член b_1).
- за аналогією в окремі чарунки записати формули для лівої та значення b_i правої частини кожного наступного обмеження*;
- в окрему чарунку записати формулу для цільової функції*;
- встановити курсор у чарунку із цільовою функцією та виконати команду Сервис⇒Поиск решения й у діалоговому вікні Поиск решения (див. рис.) встановити необхідні опції**:



- у полі Установить целевую ячейку ввести адресу чарунки, що містить формулу цільової функції, або ж виділити її натисканням ЛКМ;
- в області Равной встановити перемикач ☒ максимальному значенню або ☐ мініимальному значенню, в залежності від умови задачі (задача на *max* чи на *min*). Якщо згідно умови задачі цільова функція має досягти конкретного значення, то слід встановити перемикач ☐ значенню та у відповідне поле ввести задане значення;
- натиснути ЛКМ у рядку введення Изменяя ячейки і ввести адресу діапазону чарунок, відведених для результату (або ж виділити ці змінювані чарунки на робочому аркуші)*. Поиск решения буде підбирати

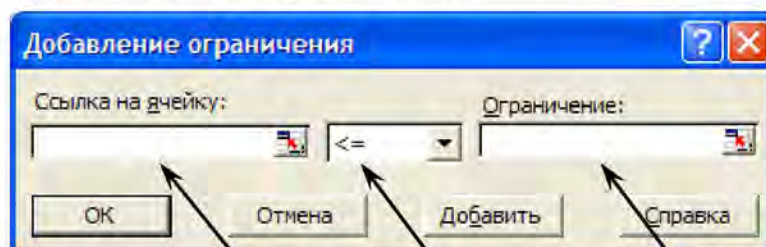
* При записі формул врахувати, що їх можна або вводити вручну, або скористатися Майстром функцій. Але у будь-якому разі у формулі мають міститися посилання на чарунки, відведені для результату.

** натискання кнопки Справка дозволить отримати довідку по роботі з засобом Поиск решения.

* кількість змінних – не більше 200

значення даних комірок, поки не знайде розв'язок. Якщо ж на даному етапі не вказувати ніякі чарунки, а натиснути кнопку **Предположить**; то система буде автоматично здійснювати пошук чарунок електронної таблиці, що містять певні значення (а не формули), які могли б впливати на значення цільової функції;

- у полі Ограничения натиснути кнопку **Добавить**;
- у вікні **Добавление ограничения**



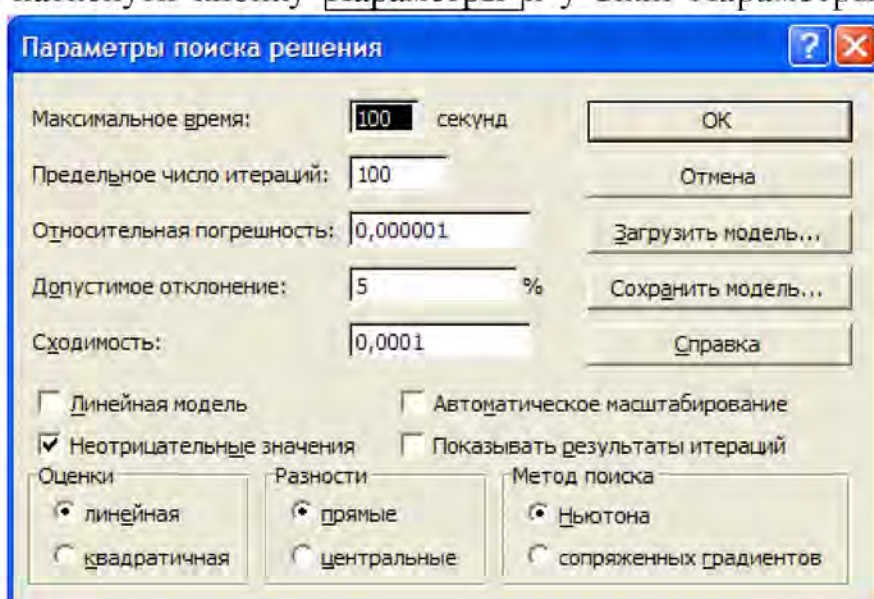
у полі **Ссылка на ячейку** ввести адресу чарунки із формулою лівої частини першого обмеження (або виділити цю чарунку), обрати із закритого списку знак обмеження й у полі **Ограничение** ввести значення правої частини першого обмеження або ж вказати адресу відповідної чарунки. При необхідності введення інших обмежень слід натиснути кнопку **Добавить** і за аналогією ввести друге обмеження, повторюючи описані дії, третє, і т.д. Після введення всіх обмежень** слід натиснути кнопку **ОК**;

– у результаті виконання попередньої дії у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения** будуть відображатись всі обмеження задачі. Якщо при записі певного обмеження були допущені помилки, то для їх усунення натисканням ЛКМ слід виділити обмеження, натиснути кнопку **Изменить** та внести корективи до обмеження. Натискання кнопки **Удалить** дозволяє вилучити виділене обмеження;

– при потребі натиснути кнопку **Параметры** й у вікні **Параметры поиска**

поиска
решений задати
додаткові
параметри*** для
розв'язання
задачі;

– натиснути
кнопку
Выполнить.



** не більше 500, якщо задача
нелінійна

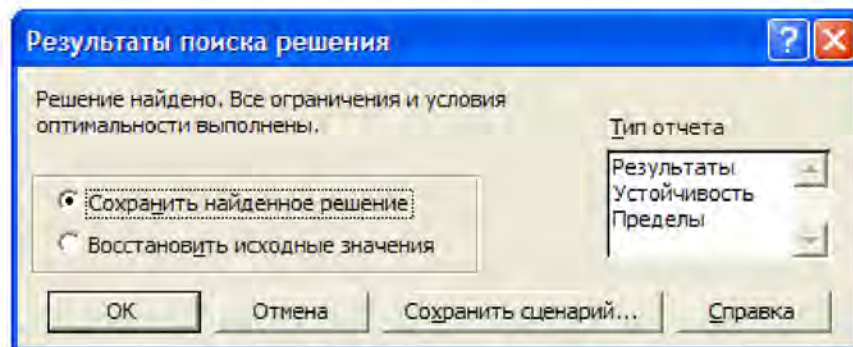
*** короткий опис параметрів подано на рис

Якщо натиснути кнопку **Закрити**, то розв'язання задачі при цьому виконуватись не буде; вікно Поиск рішення закриється, але всі опції, задані у даному вікні, будуть автоматично збережені та відобразатимуться при наступному відкритті даного вікна.

Якщо ж виконані установки не задовольняють користувача, то натискання кнопки **Восстановить** очищає діалогове вікно Поиск рішення і відображає його у початковому викладі із опціями, заданими системою за замовчуванням;

– проаналізувати результат пошуку розв'язку задачі та у діалоговому вікні Результаты поиска решений обрати опцію ☒ Сохранить найденное решение.

Якщо у вікні Результаты поиска решений обрати опцію ☒ Восстановить исходные значения, то у чарунках електронних таблиць результат розв'язання задачі виводиться не буде; в них будуть відобразатись початкові значення.



– у разі потреби створення звітів за результатами розв'язку задачі, необхідно у діалоговому вікні Результаты поиска решений натисканням ЛКМ у полі Тип отчета виділити потрібні типи звітів (вони будуть виводитись на окремих аркушах робочої книги, доданих автоматично);

– натиснути **ОК**;

– проаналізувати результат та здійснити економічну інтерпретацію отриманого розв'язку.

Порядок і методика виконання завдань

1. Засвоїти порядок введення вихідних даних у чарунки Excel для розв'язання ЗЛП із подальшим використанням засобу Поиск решения.

Розв'язання задачі лінійного чи нелінійного програмування вручну або з використанням будь-яких програмних засобів, у тому числі й табличного процесора Microsoft Excel, починають із дослідження предметної області, постановки та математичного формулювання задачі.

Вхідними даними до оптимізаційних задач є:

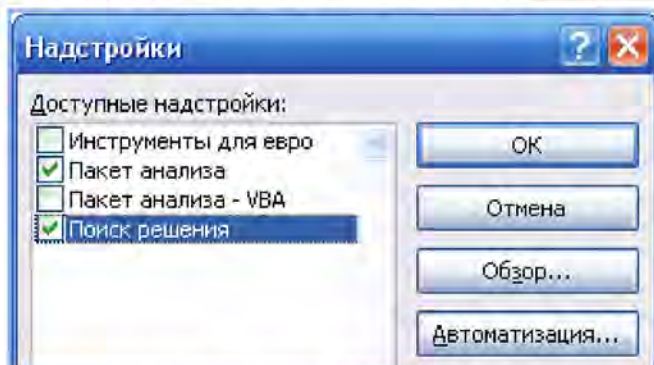
- коефіцієнти при змінних у кожному обмеженні;
- значення обсягів наявних ресурсів або інших лімітуючи факторів;
- коефіцієнти при змінних у цільовій функції.

Ці дані можна ввести у довільні чарунки табличного процесора, або ж структурувати їх у вигляді таблиці. В певних випадках означені дані можна не вводити в окремі чарунки табличного процесора, а записати безпосередньо у формулах. Але, в такому разі складніше буде виконувати корегування моделі, якщо виникне така необхідність.

2. Опанувати технологію застосування надбудови Поиск решения табличного процесора Excel для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.

Для розв'язання задач лінійного чи нелінійного програмування із використанням надбудови Поиск решения табличного процесора Microsoft Excel після побудови моделі задачі, необхідно:

- завантажити табличний процесор Microsoft Excel;
- в окремі чарунки ввести вхідні дані задачі;
- відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
- по чергову в окремі чарунки записати формули лівих та значення правих частин кожного обмеження. При записі формул врахувати, що їх можна або вводити вручну, або скористатися Майстром функцій. Але у будь-якому разі у формулі мають міститися посилання на чарунки, відведені для шуканих значень невідомих;
- в окрему чарунку записати формулу для цільової функції*;
- встановити курсор у чарунку із цільовою функцією та виконати команду Сервіс⇒Поиск решения (у версіях Microsoft Office 2007 і вище, слід на стрічці Данные обрати команду  Поиск решения).



За відсутності такої команди необхідно попередньо активізувати (увімкнути) надбудову Поиск решения за командою Сервіс⇒Настройки⇒Поиск решения (Файл⇒Параметры⇒Настройки ⇒ Перейти ⇒ Поиск решения);

- у діалоговому вікні Поиск решения заповнити необхідні поля (вказати адресу чарунки з цільовою функцією; напрямом екстремуму; адреси чарунок, відведених для шуканих значень невідомих; увести обмеження та задати умову невід'ємності);

- натиснути кнопку **Выполнить** та проаналізувати результат;
- зберегти результати розрахунків і надати практичні рекомендації виробництву.

3. *Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі аграрного виробництва засобом Поиск решения Microsoft Excel та інтерпретувати результат*

Оптимізаційні задачі аграрного виробництва, як то оптимізації структури посівних площ та сівозмін сільськогосподарських культур, оптимального виробництва та застосування кормів, оптимального розподілу мінеральних і органічних добрив, оптимізації складу та застосування машинно-тракторно парку, оптимального співвідношення галузей у сільськогосподарському підприємстві, оптимізації кормових раціонів тварин, структури та обороту стада тощо, розв'язують як задачі лінійного програмування будь-якої іншої галузі. Головне – здійснити правильну постановку задачі: побудувати цільову функцію, обмеження задачі і умову невід'ємності змінних:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr} \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, m$$

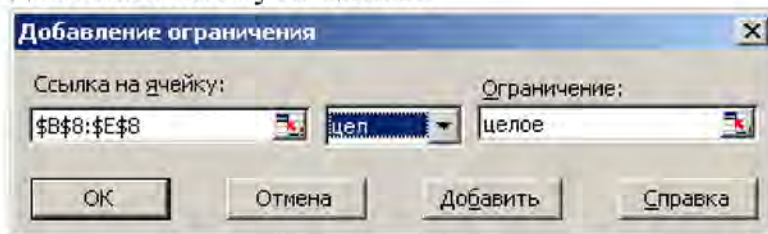
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

При постановці задачі слід записати обмежені ресурси, що забезпечують екологобезпечне господарювання з урахуванням агрономічних, економічних, соціальних факторів; зоотехнічних, інженерних та інших норм відповідно. Надалі задача розв'язується або за алгоритми відповідних математичних методів вручну, або з використанням прикладних програм, що є доцільнішим.

Якщо для розв'язання ЗЛП аграрного виробництва обрано табличний процесор Microsoft Excel, то технологія отримання результату не залежить від галузі, до якої відноситься задача. Зокрема, після побудови моделі задачі, в середовищі Microsoft Excel рекомендується скористатися засобом Поиск решения.

При розв'язанні певних задач аграрного та промислового виробництва часто виникають задачі оптимізації використання певних ресурсів, при яких результат (шукані значення невідомих) має бути цілим числом. Такі задачі, в яких необхідно знайти оптимум при обмежених ресурсах, у яких шукані невідомі приймають сталі (цілі) значення називають цілочисловими. Відповідно, методи розв'язання таких задач – відносять до розділу математичного програмування, який називають – *цілочислове програмування*.

Для розв'язання задач цілочислового програмування можна використовувати алгоритми відповідних математичних методів. Розв'язуючи задачі у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения, можна задати додаткове обмеження по цілочисельності розв'язку. Для цього у вікні Поиск решения в області Ограничения слід натиснути кнопку **Добавить** і ввести обмеження, що шукані невідомі повинні бути цілими



4. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_4.xlsx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і методика щодо їх виконання

Вправа 1. Засвоїти порядок введення вихідних даних у чарунки Excel для розв'язання ЗЛП із подальшим використанням засобу Поиск решения

1. Завантажте програму Microsoft Excel.
2. У новому документі надайте аркушу Лист 1 назву Поиск решения 1, аркушу Лист 2 назву Поиск решения 2.
3. Здійсніть підготовчу роботу для подальшого розв'язання задачі сільсько-господарського виробництва за допомогою засобу "Поиск решения"

Приклад 1.

У селянському фермерському господарстві планується посіяти пшеницю, ячмінь, кукурудзу на площі, яка не перевищує 1000 га, в т.ч. пшениці – на площі не більше 400 га. Затрати праці на 1 га кожної з означених культур становлять відповідно – 5, 4 та 20 люд.-днів. При вирощуванні та збиранні урожаю цих культур в господарстві може бути відпрацьовано до 6000 люд.-днів. Визначити такі площі посіву вказаних культур, щоб обсяг валової продукції у грошовому виразі був максимальним.

Урожайність пшениці складає 25 ц/га, ячменю – 20 ц/га, кукурудзи – 40 ц/га. Середня закупівельна ціна пшениці – 1600 грн/т, ячменю – 1200 грн/т, кукурудзи – 980 грн/т.

4. Складіть математичну модель задачі.
5. Вихідні дані до задачі введіть в чарунки B1:E4 (рис. 4.1).

	A	B	C	D	E
1		Вихідні дані:	пшениця	ячмінь	кукурудза
2		Урожайність, ц/га	25	20	40
3		Закупівельна ціна, грн./ц	160	120	98
4		Затрати праці, люд.-днів	5	4	20
5					
6		Площа, га			
7					
8		Валова продукція, грн	=C2*C3*C6	=D2*D3*D6	=E2*E3*E6
9		Сумарна валова продукція, грн	=C8+D8+E8		
10					
11		Обмеження:			
12			=C6+D6+E6	<=	1000
13			=C6	<=	400
14			=C4*C6+D4*D6+E4*E6	<=	6000

Рис. 4.1. Аркуш *Поиск решения 1*

Вправа 2. Опанувати технологію застосування надбудови Поиск решения табличного процесора Excel для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування

1. Для опанування технології застосування надбудови Поиск решения виконайте розв'язання задачі Прикладу 1 за допомогою даного засобу, дотримуючись подальших вказівок.
2. Чарунки C6:E6 залиште пустими. Але майте на увазі, що в подальшій роботі в них буде занесено результат розв'язання задачі – площі сільськогосподарських культур.
3. В чарунки C8:E8 запишіть формули для обчислення валової продукції по кожній з культур.
4. В чарунку C9 запишіть формулу для обчислення функціоналу – сумарної валової продукції.
5. В чарунки C13:C15 запишіть формули, які моделюють ліву частину обмежень.
6. В чарунки D13:D15 відповідно запишіть знаки в обмеженнях (що не є обов'язковим).
7. В чарунки E13:E15 відповідно запишіть числа, що моделюють праву частину обмежень.
8. Відформатуйте чарунки аркушу за зразком, наведеному на рис. 4.1 (задайте типи шрифтів, рамки, заливку).

9. Встановіть курсор в чарунку, де буде записане значення цільової функції.
10. Виконайте команду **Данные⇒Поиск решения (Сервис⇒Поиск решения)**.
11. У вікні **Поиск решения**:
 - ▢ перевірте адресу чарунки цільової функції (для даного прикладу \$C\$9);
 - ▢ у полі **Равной** встановіть перемикач максимальному значенню;
 - ▢ введіть у поле **Изменяя ячейки** діапазон чарунок, значення яких розраховуються (в даному прикладі \$C\$6:\$E\$6);
 - ▢ встановіть курсор у поле **Ограничения**: і натисніть кнопку **Добавить**. У вікні **Добавление ограничения** введіть посилання* на чарунку \$C\$13, виберіть знак обмеження $\leq$, запишіть посилання на чарунку \$D\$13 в якості правої частини обмеження і натисніть кнопку **Добавить**. У наступному вікні **Добавление ограничения** по аналогії введіть наступне обмеження і т.д. Після введення останнього обмеження у вікні **Добавление ограничения** натисніть кнопку **ОК**;
 - ▢ натисніть кнопку **Параметры** і у вікні **Параметры поиска решений** встановіть перемикач **Неотрицательные значения** і натисніть кнопку **Ок**;
 - ▢ натисніть кнопку **Выполнить**.
12. У вікні **Результаты поиска решений** встановіть перемикач **Сохранить найденные решения** і натисніть кнопку **ОК**.
13. Проаналізуйте результат розв'язання задачі.
14. Значення показників, що вимірюються в грошових одинцях заокругліть до двох знаків після коми, всі інші – до одного знаку після коми.
15. Збережіть результати роботи у Вашій папці диску D:\ з іменем *laboratorna_4.xlsx*.
16. Вміст аркушу **Поиск решения 1** скопіюйте на аркуш **Поиск решения 2**.
17. Очистіть чарунки з результатами розв'язання попередньої задачі.
18. Внесіть корективи до умови попередньої задачі:

Приклад 2.

Додайте ще одну довільну культуру, причому, для додержання раціональних сівозмін на площі не меншій 100 га рекомендується посіяти зернобобові культури, наприклад горох. Урожайність гороху 26 ц/га, затрати праці на 1 га – 4 люд.-днів, закупівельна ціна – 1050 грн/т. Змініть обмеження по площі пшениці: вона повинна бути не менше 400 га. Перевірте кожне обмеження з урахуванням доданої культури.

19. Розв'яжіть задачу з врахуванням внесених коректив.
20. Запишіть відповідь до задачі, проаналізуйте результат та збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_4.xlsx*.

* Посилання на чарунки можна виконувати натисканням ЛКМ на відповідній чарунці.

Вправа 3. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі аграрного виробництва засобом Поиск решения Microsoft Excel та інтерпретувати результат

1. Ознайомтеся з умовою задачі з оптимізації поєднання галузей в аграрному підприємстві.

Приклад 3.

У фермерському господарстві, що спеціалізується на виробництві зерна, овочів та молока, земельні ресурси складаються з 500 га ріллі, 60 га пасовищ і 30 га природних сінокосів. Продуктивність пасовищ і сінокосів становить 110 і 25 ц/га.

Трудові ресурси та технічна оснащеність господарства дозволяють відпрацювати упродовж року 20600 людино-днів і 3080 машино-змін, у т.ч. в напружений період (з середини липня по середину вересня) – 5800 людино-днів і 750 машино-змін. Прямі витрати праці на 1 га пасовищ і природних сінокосів плануються 2,8 і 4,2 люд.-днів відповідно, у т.ч в напружений період – 1,1 і 1,4 люд.-днів. На механізований обробіток 1 га сінокосів планується витратити 0,8 машино-змін.

Витрати виробничих ресурсів на одиницю галузі, що розвиваються в господарстві, урожайності с.-г. культур, собівартості продукції та прогнозні ціни її реалізації наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

Вихідні дані до Прикладу 3

Показники	На 1 га										На 1 корову
	пшениця озима	ячмінь	овочі на продаж	ярі фуражні	багаторічні трави		однорічні трави		силосні культури	кормові коренеплод	
					на з.к.	на сіно	на з.к.	на сіно			
Витрати праці, люд.-дн.:											
усього	5	4	54	4,5	5,2	4,2	4,8	4,1	8,4	48	62
у напруж.період	1,2	1,2	15	0,5	0,8	0,6	0,7	0,6	1,1	6,7	18
Витрати мехресурсів, маш.-змін:											
усього	1,4	1,4	11,2	0,8	1	1,2	1	1	2,2	4,4	5,6
у напруж.період	0,35	0,45	3,4	0,2	0,25	0,3	0,25	0,25	0,48	0,98	1,04
Урожайність, ц/га	46,2	32,4	260	32	110	30	95	25	180	350	×
Собівартість 1 ц, грн.	210	216	262								
Ціна реалізації 1 ц, грн.	340	382	414								

При оптимізації поєднання галузей врахувати з урахуванням наведених нижче вимог:

- обсяги реалізації пшениці озимої, ячменю та овочів плануються не меншими 693, 200, та 3120 т відповідно;
- молока необхідно реалізувати не менше 860 т при собівартості 28,62 грн./т і річному надої від однієї корови рівному 48,5 ц. Запланована продуктивність може бути досягнута при забезпеченні однієї корови 52 ц корм.од. і 5,6 ц перетравного протеїну на рік;
- мінімальні річні фізіологічні норми згодовування окремих груп кормів (ц корм.од.) повинні бути такими: концентровані корми – 7,92, грубі – 14,2, зелені – 19,6, соковиті – 7,85;
- окрім молока господарство планує отримати у середньому від корови ще й 0,4 ц м'яса собівартістю 2830,7 грн./ц. Прогнозні ціни реалізації 1 ц молока та м'яса в регіоні становлять відповідно 420,8 та 4412,5 грн.;
- при плануванні величин площ висіву кормових культур слід врахувати, що: а) під багаторічні та однорічні трави треба виділити не менше 78 га ріллі, б) площі під силосні культури повинні бути такими, щоб забезпечувати галузь тваринництва силосом не менше, ніж кормовими коренеплодами;
- господарство може придбати не більше 28 т комбікормів вартістю 1860 грн./т (1 ц комбікормів містить 0,9 ц корм.од. і 0,096 ц перетравного протеїну);
- у господарстві повинен бути річний страховий фонд кормів обсягом 500 ц корм.од. і 50 ц перетравного протеїну;
- при плануванні величин обсягів виробництва кормів для галузі тваринництва слід використати дані щодо поживності окремих видів с.-г. культур, що наведені нижче

С.-г. культури	Продукція основна і побічна	Міститься в 1 ц		Співвідношення основної та побічної продукції
		корм. од., ц	перетравного протеїну, кг	
Пшениця озима	зерно	1,19	12,0	1 : 1
	солома	0,20	0,5	
Ячмінь	зерно	1,13	8,0	1 : 1
	солома	0,33	1,3	
Фуражні ярі	зерно, боби	1,17	19,5	1 : 1,5
	сіно	0,30	3,5	
Багаторічні трави	зелені корми	0,20	2,2	×
	сіно	0,46	6,5	
С.-г. культури	Продукція основна і побічна	Міститься в 1 ц		Співвідношення основної та побічної продукції
		корм. од., ц	перетравного протеїну, кг	
Однорічні трави	зелені корми	0,18	4,1	×
	сіно	0,51	7,2	
Кукурудза	силос	0,20	1,5	×
	коренеплоди	0,12	1,0	
Кормові коренеплоди	гичка	0,10	1,8	1 : 0,1
	зелені корми	0,20	2,5	
Трави пасовищ	зелені корми	0,20	2,5	×
	сіно	0,48	6,8	
Природні сінокоси	сіно	0,48	6,8	×
	зелені корми	0,20	2,5	

2. Ознайомтеся з технологією побудови математичної моделі задачі з оптимізації поєднання галузей в аграрному підприємстві

Математичне формулювання:

Побудову математичної моделі почнемо з позначення шуканих змінних.
Нехай:

- x_1 – площа під пшеницю озиму, га;
- x_2 – площа під ячмінь, га;
- x_3 – площа під овочі на продаж, га;
- x_4 – площа під ярі фуражні культури, га;
- x_5 – площа під багаторічні трави на зелені корми, га;
- x_6 – площа під багаторічні трави на сіно, га;
- x_7 – площа під однорічні трави на зелені корми, га;
- x_8 – площа під однорічні трави на сіно, га;
- x_9 – площа під силосні культури (кукурудзу на силос), га;
- x_{10} – площа під кормові коренеплоди, га;
- x_{11} – поголів'я корів, голів;
- x_{12} – обсяг закуплених комбікормів, ц.

Математична модель задачі має вигляд:

Система обмежень:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 500$ (га);
- 2) $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 78$ (га);
- 3) $5x_1 + 4x_2 + 54x_3 + 4,5x_4 + 5,2x_5 + 4,2x_6 + 4,8x_7 + 4,1x_8 + 8,4x_9 + 48x_{10} + 62x_{11} + 2,8 \times 60 + 4,2 \times 30 \leq 21106$ (люд.-дн.), або
 $5x_1 + 4x_2 + 54x_3 + 4,5x_4 + 5,2x_5 + 4,2x_6 + 4,8x_7 + 4,1x_8 + 8,4x_9 + 48x_{10} + 62x_{11} \leq 20306$ (люд.-дн.);
- 4) $1,2x_1 + 1,2x_2 + 15x_3 + 0,5x_4 + 0,8x_5 + 0,6x_6 + 0,7x_7 + 0,6x_8 + 1,1x_9 + 6,7x_{10} + 18x_{11} + 1,1 \times 60 + 1,4 \times 30 \leq 5800$ (люд.-дн.), або
 $1,2x_1 + 1,2x_2 + 15x_3 + 0,5x_4 + 0,8x_5 + 0,6x_6 + 0,7x_7 + 0,6x_8 + 1,1x_9 + 6,7x_{10} + 18x_{11} \leq 5692$ (люд.-дн.);
- 5) $1,4x_1 + 1,4x_2 + 11,2x_3 + 0,8x_4 + x_5 + 1,2x_6 + x_7 + x_8 + 2,2x_9 + 4,4x_{10} + 5,6x_{11} + 0,1x_{12} + 0,8 \times 30 \leq 3080$ (маш.-зм.), або
 $1,4x_1 + 1,4x_2 + 11,2x_3 + 0,8x_4 + x_5 + 1,2x_6 + x_7 + x_8 + 2,2x_9 + 4,4x_{10} + 5,6x_{11} + 0,1x_{12} \leq 3056$ (маш.-зм.);
- 6) $0,35x_1 + 0,45x_2 + 3,4x_3 + 0,2x_4 + 0,25x_5 + 0,3x_6 + 0,25x_7 + 0,25x_8 + 0,48x_9 + 0,98x_{10} + 1,04x_{11} \leq 750$ (маш.-зм.);
- 7) $46,2x_1 \geq 6930$ (ц);
- 8) $32,4x_2 \geq 2000$ (ц);
- 9) $260x_3 \geq 31200$ (ц);
- 10) $48,5x_{11} \geq 8600$ (ц);

- 11) $32 \times 1,17x_4 + 0,9x_{12} \geq 7,92x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-37,44x_4 + 7,92x_{11} - 0,9x_{12} \leq 0$ (ц корм.од.);
- 12) $46,2 \times 0,2x_1 + 32,4 \times 0,33x_2 + 32 \times 1,5 \times 0,3x_4 + 30 \times 0,46x_6 + 25 \times 0,51x_8 + 25 \times 30 \times 0,48 \geq 14,2x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-9,24x_1 - 10,692x_2 - 14,4x_4 - 13,8x_6 - 12,75x_8 + 14,2x_{11} \leq 360$ (ц корм.од.);
- 13) $110 \times 0,2x_5 + 95 \times 0,18x_7 + 110 \times 60 \times 0,2 \geq 15,3x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-22x_5 - 17,1x_7 + 15,3x_{11} \leq 1320$ (ц корм.од.);
- 14) $180 \times 0,2x_9 + (350 \times 0,12 + 35 \times 0,1)x_{10} \geq 7,85x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-36x_9 - 45,5x_{10} + 7,85x_{11} \leq 0$ (ц корм.од.);
- 15) $9,24x_1 + 10,692x_2 + (37,44 + 13,8)x_4 + 22x_5 + 13,8x_6 + 17,1x_7 + 12,75x_8 + 36x_9 + 45,5x_{10} + 0,9x_{12} + 360 + 1320 \geq 52x_{11} + 500$ (ц корм.од.), або
 $-9,24x_1 - 10,692x_2 - 51,24x_4 - 22x_5 - 13,8x_6 - 17,1x_7 - 12,75x_8 - 36x_9 - 45,5x_{10} + 52x_{11} - 0,9x_{12} \leq 1180$ (ц корм.од.);
- 16) $46,2 \times 0,005x_1 + 32,4 \times 0,013x_2 + (32 \times 0,195 + 32 \times 1,5 \times 0,035)x_4 + 110 \times 0,022x_5 + 30 \times 0,065x_6 + 95 \times 0,041x_7 + 25 \times 0,072x_8 + 180 \times 0,015x_9 + (350 \times 0,01 + 35 \times 0,018)x_{10} + 0,096x_{12} + 110 \times 60 \times 0,025 + 25 \times 30 \times 0,068 \geq 5,6x_{11} + 50$ (ц перетравного протеїну), або
 $-0,231x_1 - 0,4212x_2 - 7,92x_4 - 2,42x_5 - 1,95x_6 - 3,895x_7 - 1,8x_8 - 2,7x_9 - 4,13x_{10} + 5,6x_{11} - 0,096x_{12} \leq 166$ (ц перетравного протеїну);
- 17) $-36x_9 + 45,5x_{10} \leq 0$ (ц корм.од.);
- 18) $x_{12} \leq 280$ (ц корм.од.).

Цільова функція:

$$Z_{\max} = (340 - 210) \times 46,2x_1 + (382 - 216) \times 32,4x_2 + (414 - 262) \times 260x_3 + (420,8 - 286,2) \times 48,5x_{11} + (4412,5 - 2830,7) \times 0,4x_{11} - 186x_{12} \text{ (грн.)}, \text{ або}$$

$$6006x_1 + 5378,4x_2 + 39520x_3 + 7160,82x_{11} - 186x_{12} \text{ (грн.)}.$$

3. Розв'яжіть **Приклад 3** – задачу з оптимізації поєднання галузей в аграрному підприємстві за допомогою засобу **Поиск решения** табличного процесора Microsoft Excel, дотримуючись вказівок:

- Активізуйте аркуш **Приклад 3** табличного документу *laboratorna_4.xlsx*.
- У чарунки **A1:N23** (рис. 4.2 а) ведіть вихідні дані до запропонованої задачі оптимізації поєднання галузей **Приклад 3** (рекомендується скопіювати ці дані із файлу *do_laborator_4.xlsx* вашої робочої папки).
- У чарунки **C24:N24** ведіть ідентифікатор шуканих змінних, а чарунки **C25:N25** відведіть для шуканих значень невідомих.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Задача з оптимізації поводнання галузей у фермерському господарстві (вихідні дані)													
2	Номер обмеж.	Обмеження по:	С.-г. культури										Поголів'я корів	Комбікорми
3			пшениця озима	ячмінь	овочі на продаж	ярі фуражні	багаторічні трави		однорічні трави		силосні	корм. коренеплоди		
4							на з.к.	на сіно	на з.к.	на сіно				
5	1	загальній площі ріллі	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
6	2	площам багато- та одно-річним трав					1	1	1	1				
7	3	прямим витратам праці	5	4	54	4,5	5,2	4,2	4,8	4,1	8,4	48	62	
8	4	прям. витр. пр. у напр. пер.	1,2	1,2	15	0,5	0,8	0,6	0,7	0,6	1,1	6,7	18	
9	5	механізованим роботам	1,4	1,4	11,2	0,8	1	1,2	1	1	2,2	4,4	5,6	0,1
10	6	мех. роботам у напр. період	0,35	0,45	3,4	0,2	0,25	0,3	0,25	0,25	0,48	0,98	1,04	
11	7	виробн. пшениці озимої	46,2											
12	8	виробництву ячменю		32,4										
13	9	виробн. овочів на продаж			260									
14	10	виробництву молока											48,5	
15	11	загот. і викор. конц. кормів				-37,44							7,92	-0,9
16	12	загот. і викор. грубих кормів	-9,24	-10,692		-14,4		-13,8		-12,75			14,2	
17	13	загот. і викор. зелених кормів					-22		-17,1				15,3	
18	14	загот. і викор. соковит. кормів									-36	-45,5	7,85	
19	15	загот. і викор. кормів усього	-9,24	-10,692		-51,24	-22	-13,8	-17,1	-12,75	-36	-45,5	52	-0,9
20	16	загот. і викор. перетр. прот.	-0,231	-0,4212		-7,92	-2,42	-1,95	-3,895	-1,8	-2,7	-4,13	5,6	-0,096
21	17	спів. відн. між сил. і коренепл.									-36	45,5		
22	18	придбання комбікормів												1
23		Функціонал	6006	5378,4	39520								7160,82	-186
24		Ідентифікатори змінних	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12
25		Значення змінних												

Рис. 4.2 а. Аркуш **Приклад 3** з вихідними даними до задачі

- У чарунку O5 уведіть формулу лівої частини першого обмеження, використовуючи вбудовану функцію =СУММПРОИЗВ() та абсолютні посилання на чарунки, відведені для результату \$C\$25:\$N\$25 (рис. 4.2 б).
- Скопіюйте введену формулу, використовуючи засіб Автозаповнення на чарунки O4:D23.
- У чарунки P5:Q23 введіть знаки та значення правих частин кожного обмеження.
- Активізуйте чарунку O23 та виконайте команду Даные⇒Поиск решения (у більш ранніх версіях Office - команду Сервис⇒Поиск решения).
- У вікні Параметры поиска решения, що з'явиться на екрані, задайте потрібні опції (рис. 4.3) та натисніть кнопку **Найти решение**.

4. Проаналізуйте результат розв'язання **Прикладу 3** (рис. 4.4)

З рис. 4.4 видно, що $x_1 = 150$, $x_2 = 61,728$, $x_3 = 122,4$, $x_4 = 53,153$, $x_5 = 65,99$, $x_6 = 0$, $x_7 = 12,015$, $x_8 = 0$, $x_9 = 19,41$, $x_{10} = 15,355$, $x_{11} = 178$, $x_{12} = 280$, $Z_{max} = 7290974$.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Номер обмеж.	Обмеження по:	Формули	Знаки	Вільні члени
4					
5	1	загальній площі ріллі	0	≤	500
6	2	площам багато- та одно-річним трав	0	≤	78
7	3	прямим витратам праці	0	≤	20306
8	4	прям. витр. пр. у напр. пер.	0	≤	5692
9	5	механізованим роботам	0	≤	3056
10	6	мех. роботам у напр. період	0	≤	750
11	7	виробн. пшениці озимої	0	≤	6930
12	8	виробництву ячменю	0	≤	2000
13	9	виробн. овочів на продаж	0	≤	31200
14	10	виробництву молока	0	≤	8600
15	11	загот. і викор. конц. кормів	0	≤	0
16	12	загот. і викор. прубих кормів	0	≤	360
17	13	загот. і викор. зелних кормів	0	≤	1320
18	14	загот. і викор. соковит. кормів	0	≤	0
19	15	загот. і викор. кормів усього	0	≤	1180
20	16	загот. і викор. перетр. прот	0	≤	166
21	17	співвідн. між сил. і коренепл.	0	≤	0
22	18	придбанню комбікормів	0	≤	280
23		Функціонал	0!		
24		Ідентифікатори змінних			
25		Значення змінних			

Рис.4.26. Фрагменти Аркушу Приклад 3 після введення вхідних даних і формул

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Справка

Рис. 4.3. Видяг вікна Параметри поиска рішення перед розв'язуванням Прикладу 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Задача з оптимізації поєднання галузей у фермерському господарстві (вихідні дані та результат)																
2	Номер обмеж.	Обмеження по:	С.-г. культури										Поголів'я корів	Комбікорми	Формули	Значи	Вільні члени
3			пшениця озима	ячмінь	овочі на продаж	ярі фуражні	багаторічні трави		однорічні трави		сілосні	корм.коренеплоди					
4							на з.к.	на сіно	на з.к.	на сіно							
5	1	загальній площі ріллі	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			500	<=	500
6	2	площам багат- та однорічним трав					1	1	1	1					78	>=	78
7	3	прямим витратам праці	5	4	54	4,5	5,2	4,2	4,8	4,1	8,4	48	62		20180,2	<=	20306
8	4	прям.витр.лр. у напр.лер.	1,2	1,2	15	0,5	0,8	0,6	0,7	0,6	1,1	6,7	18		5505,42	<=	5692
9	5	механізованим роботам	1,4	1,4	11,2	0,8	1	1,2	1	1	2,2	4,4	5,6	0,1	2922,39	<=	3056
10	6	мех.роботам у напр.період	0,35	0,45	3,4	0,2	0,25	0,3	0,25	0,25	0,48	0,98	1,04		735,904	<=	750
11	7	виробн.пшениці озимої	46,2												6930	<=	6930
12	8	виробництв у ячменю		32,4											2000	<=	2000
13	9	виробн.овочів на продаж			260										31812,7	<=	31200
14	10	виробництв у молока											48,5		8633	<=	8600
15	11	загот.і викор.конц.кормів				-37,44							7,92	-0,9	-832,297	<=	0
16	12	загот.і викор.пробих.кормів	-9,24	-10,692		-14,4		-13,8		-12,75			14,2		-283,807	<=	360
17	13	загот.і викор.зелених кормів					-22		-17,1				15,3		1066,27	<=	1320
18	14	загот.і викор.соковент.кормів									-36	-45,5	7,85		4,5E-13	<=	0
19	15	загот.і викор.кормів усього	-9,24	-10,692		-51,24	-22	-13,8	-17,1	-12,75	-36	-45,5	52	-0,9	1180	<=	1180
20	16	загот.і викор.перетр.прот.	-0,231	-0,4212		-7,92	-2,42	-1,95	-3,895	-1,8	-2,7	-4,13	5,6	-0,096	166	<=	166
21	17	спів.відн.між. сил. і коренепл.									-36	45,5			2,3E-13	<=	0
22	18	придбання комбікормів												1	280	<=	280
23		Функціонал	6006	5378,4	39520								7160,82	-186	7290974		
24		Ідентифікатори змінних	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12			
25		Значення змінних	150	61,728	122,4	53,153	65,99	0	12,015	0	19,41	15,3549	178	280			

Рис. 4.4. Фрагмент Аркушу Приклад 3 з розв'язком Прикладу 3

Відповідь:

Оптимальне поєднання галузей у фермерському господарстві полягає в наступному:

- 500 га ріллі слід розподілити так: під пшеницю озиму – 150 га, під ячмінь – 61,7 га, під овочі на продаж – 122,4 га, під ярі фуражні – 53,2 га, під багаторічні та однорічні трави на зелені корми – 66 та 12 га відповідно, під сілосні – 19,4 га, під коренеплоди – 15,36 га, висівати багаторічні та однорічні трави на сіно не доцільно;
- поголов'я корів у господарстві повинно бути 178 голів;
- господарству слід придбати 28 т комбікормів;
- очікуваний максимальний прибуток – 7 млн. 290 тис. 974 грн.

- Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_4.xlsx* і завершіть роботу з табличним процесором. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, умови задач, математичні моделі задач, розв'язок задач, відповідь до задач і практичні рекомендації та

роздрукований на принтері результуючий документ Microsoft Excel *laboratorna_4.xlsx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію, маючи електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Яка надбудова табличного процесора Microsoft Excel дозволяє розв'язувати оптимізаційні задачі?
2. Опишіть алгоритм розв'язання ЗЛП у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
3. Чи потрібно записувати у чарунки Microsoft Excel формули цілової функції при розв'язанні ЗЛП із використанням засобу Поиск решения?
4. Як вводяться обмеження задачі?
5. Опишіть опції вікна Поиск решения.
6. Як встановити умову невід'ємності змінних?
7. Як ініціювати процес пошуку розв'язку задачі (як викликати вікно Поиск решения)?
8. Скільки обмежень можна задати у задачі?
9. Яка кількість невідомих може бути допустимою при використанні надбудови Поиск решения?
10. Де буде записуватися відповідь до задачі?

Список рекомендованої літератури:

1. Булига К. Б. Комп'ютерний практикум із застосуванням математичних методів в економіці / К. Б. Булига, В.М. Міхайленко. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 67 с.
2. Калініченко А. В. Використання оптимального програмування при розв'язанні задач сільськогосподарського виробництва / А.В.Калініченко, К. Д. Костоглод, Н. М. Протас. – Полтава: Видавництво “ІнтерГрафіка”, 2004. – 101 с.
3. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике / П.Конюховский. – Санкт-Петербург: Питер, 2000. – 208 с.
4. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.
5. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.– 277 с.

ТЕМА 3. ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ У ПРИРОДОКОРИСТУВАННІ. ПРИЙНЯТТЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

Тема: Оптимізація розподілу ресурсів і транспортних перевезень із використанням засобу Поиск решения MS Excel

Мета: Навчитися розв'язувати закриті та відкриті розподільчі (транспортні) задачі за алгоритмом методу потенціалів та з використанням можливостей електронних таблиць

Завдання:

1. Навчитися здійснювати постановку та математичне формулювання транспортних (розподільчих) задач.
2. Засвоїти алгоритм розв'язання розподільчих (транспортних) задач методом потенціалів.
3. Навчитися розв'язувати розподільчі (транспортні) задачі на ПК у програмі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
4. Набути навиків розв'язання розподільчих (транспортних) задач із додатковими обмеженнями.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка, персональний комп'ютер, де встановлено табличний процесор Microsoft Excel.

Короткий теоретичний коментар

У сільському господарстві та інших галузях економіки велику питому вагу займають транспортні роботи, оскільки всі продукція транспортується від місця її виготовлення до місця її реалізації, зберегіння чи споживання.

Таке зростання обсягів транспортних перевезень суттєво погіршує стан довкілля і атмосферного повітря, зокрема. Аналіз заходів із зниженням токсичності відпрацьованих газів автомобілів дозволяє виділити основні напрями боротьби зі шкідливим впливом автотранспорту на довкілля: використання нових типів силового устаткування з мінімальним викидом шкідливих речовин; заміна і вдосконалення конструкції, робочих процесів, технології виробництва автомобілів з метою зниження токсичності

відпрацьованих газів; застосування пристроїв очищення або нейтралізації відпрацьованих газів; використання альтернативного або зміна характеристик традиційного палива тощо.

Важливим напрямом зменшення негативних впливів на довкілля є зменшення пробігів транспорту за рахунок оптимізації маршрутів перевезень, що є основою транспортної задачі. Тому виникає потреба оптимізувати перевезення, що дозволить скоротити пробіги автомобілів.

Транспортна задача лінійного програмування є окремим випадком загальної задачі лінійного програмування та підкласом досить широкого класу *розподільчих* задач, дозволяють оптимізувати розподіл ресурсів. Постановка та математична модель транспортної задачі дещо відрізняються від постановки та математичного запису загальної задачі лінійного програмування.

Постановка класичної транспортної задачі полягає в пошуку оптимального плану перевезень продукції від постачальників до споживачів, який задовольняв би потреби усіх споживачів та мав мінімальний загальний обсяг транспортних робіт (мінімальну загальну вартість перевезень, мінімальну витрату палива).

Таблиця 5.1

Матриця планування транспортної задачі (загальний вигляд)

Постачальники	Споживачі						Запаси
	B_1	B_2	...	B_j		B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	..	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

У випадку, коли загальні запаси продукції у постачальників співпадають із загальними потребами у продукції в споживачів, транспортна задача називається **закритою**.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (5.1)$$

У випадку, коли загальні запаси продукції у постачальників не дорівнюють сумарним потребам споживачів у продукції, транспортна задача називається **відкритою**:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j. \quad (5.2)$$

У зв'язку зі специфікою транспортних задач їх можна розв'язувати не тільки симплекс-методом, а й методами, що характерні саме для цього класу задач, а саме: дельта-методом, методом апроксимації Фогеля, методом диференціальних рент, методом потенціалів та іншими. Із означених методів достатньо ефективним і відносно простим є метод потенціалів.

Транспортні задачі є окремим випадком більш широкого класу задач – *розподільчих*, основною особливістю яких є те, що вони охоплюють більш широке коло випадків розподілу тих чи інших видів ресурсів за екстремумом будь-якого сенсу. Тобто задачі можуть розв'язуватися як на мінімум, так і на максимум на основі відповідних методів.

Аналогічно до транспортних, розподільчі задачі можуть бути двох

$$\text{типів: закриті } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{і відкриті } \sum_{i=1}^m a_i \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sum_{j=1}^n b_j.$$

Відкриті розподільчі та транспортні задачі можна розв'язати методом потенціалів після зведення їх до закритих, шляхом уведення фіктивного постачальника чи споживача продукції, пропозиція чи відповідно, попит

$$\text{якого складає } a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \quad (b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j).$$

Розподільчі (транспортні) задачі доцільно розв'язувати на ПК із використанням програмних засобів, що застосовуються для розв'язання ЗЛП.

У зв'язку зі специфікою транспортних задач їх можна розв'язувати не тільки симплекс-методом, а й методами, що характерні саме для цього класу задач, а саме: дельта-методом, методом апроксимації Фогеля, методом диференціальних рент, методом потенціалів та іншими. Із означених методів достатньо ефективним і відносно простим є метод потенціалів. Основні ідеї цього методу були сформульовані Л.В. Канторовичем ще на межі 30-х – 40-х років ХХ століття. У 1951 р. Дж. Б. Данциг для розв'язання транспортної задачі запропонував модифікований розподільчий метод (або метод *Modi*), у якому також використовувалася система потенціалів.

Транспортні задачі є окремим випадком більш широкого класу задач – *розподільчих*, основною особливістю яких є те, що вони охоплюють більш широке коло випадків розподілу тих чи інших видів ресурсів за екстремумом будь-якого сенсу. Тобто задачі можуть розв'язуватися як на мінімум, так і на максимум на основі відповідних методів.

Порядок і методика виконання завдань

1. Навчитися здійснювати постановку та математичне формулювання транспортних (розподільчих) задач.

Постановка транспортної задачі:

У m постачальників ($A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$) зосереджено деякий однорідний вантаж (ресурс) у кількості a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) одиниць відповідно, який необхідно транспортувати n споживачам ($B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$) у кількості b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) одиниць. Відомі відстані в кілометрах між кожним постачальником вантажу та кожним його споживачем (або вартості перевезення одиниці вантажу в гривнях від i -го постачальника до j -го споживача тощо) – c_{ij} . Необхідно скласти такий план перевезень $X\{x_{ij}\}$, який задовольняв би потреби усіх споживачів та мав мінімальний загальний обсяг транспортних робіт (мінімальну загальну вартість перевезень).

У розподільчій задачі необхідно розподілити наявні ресурси кількох видів між кількома об'єктами так, щоб функція мети досягала оптимального значення.

Відповідно, **модель розподільчої (транспортної) задачі** має вигляд.

$$\text{Визначити } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{extr}$$

за умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \leq a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \leq a_2, \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \leq a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} \leq b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} \leq b_2, \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} \leq b_n \end{array} \right.$$

2. Засвоїти алгоритм розв'язання розподільчих (транспортних) задач методом потенціалів.

Для розв'язання розподільчих (транспортних) задач можна використати симплекс чи модифікований симплекс-метод, спеціально розроблені метод апроксимації Фогеля, дельта-метод, метод диференціальних рент та інші подібні методи. Найбільш ефективним і нескладним є методом потенціалів

АЛГОРИТМ МЕТОДУ ПОТЕНЦІАЛІВ:

Записати математичну модель задачі

Задача закрита?

$$\left(\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j \right)$$

ні

так

$$\left(\sum_{i=1}^m A_i > \sum_{j=1}^n B_j \right)$$

ні

Ввести
фіктивного
споживача

Ввести
фіктивного
постачальника

Побудувати опорний план

Розрахувати значення цільової
функції $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$

Кількість заповнених
клітинок $< m+n-1$

так

Ввести нуль-поставку

Кількість заповнених
клітинок $= m+n-1$

так

Розрахувати систему
потенціалів $u_i + v_j = C_{ij}$

Розрахувати характеристики
вільних клітинок
 $l_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$

Вибрати найменшу поставку у
вершинах, позначених “-” і
перерозподілити її по контуру

Вершини побудованого
контура позначити
символами “+” та “-”

Побудувати контур по
перерозподілу ресурсів

Умова оптималь-
ності виконується?

$$(l_{ij} < 0)$$

так

Задача на
мінімум?

так

Умова оптималь-
ності виконується?

$$(l_{ij} > 0)$$

так

Сформулювати висновок

3. Навчитися розв'язувати розподільчі (транспортні) задачі на ПК у програмі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.

У нинішній час розвитку інноваційних технологій та комп'ютерної техніки було б помилкою думати, що транспортні (розподільчі) задачі людство не навчилося розв'язувати з використанням спеціальних комп'ютерних програм. Оскільки такі задачі є окремим випадком задач лінійного програмування, то для їх розв'язання можна використати табличний процесор Microsoft Excel і, зокрема, його надбудову Поиск решения (solver).

Для розв'язання розподільчих (транспортних) задач в Microsoft Excel із використанням надбудови Поиск решения необхідно:

- побудувати математичну модель задачі;
- в окремі чарунки Excel записати вихідні дані – задану матрицю відстаней $C\{c_{ij}\}$ між постачальниками та споживачами (матрицю вартостей, урожайностей тощо);
- відвести окремі чарунки Excel, залишивши їх незаповненими, для шуканого розв'язку $X\{x_{ij}\}$ – плану розподілу (перевезень) продукції;
- записати формули лівої частини обмежень: суми по відповідних рядках (вся продукція від кожного споживача повинна вивозитися) і суми по відповідних стовпчиках (задоволення попиту кожного споживача);
- в окремі чарунки записати значення правих частин кожного обмеження;
- увести формулу для обчислення цільової функції задачі, використовуючи вбудовану функцію MS Excel СУММПРОИЗВ*. Зверніть увагу, що в чарунках, де були введені формули на даному етапі будуть нулі.
- виконати дію Данные⇒Поиск решения (виконати команду Сервис ⇒ Поиск решения) для ініціалізації розв'язання задачі;
- встановити необхідні опції у вікні Параметры поиска решения (адресу чарунки з формулою цільової функції; напрямок екстремуму; адресу масиву чарунок для шуканих значень невідомих; обмеження задачі; умову невід'ємності та при потребі інші параметри);
- натиснути кнопку **Найти решение** (кнопку **Выполнить**);
- здійснити інтерпретацію отриманого результату, або ж при потребі скорегувати модель і розв'язати задачу з новими вхідними даними.

* Нагадаємо, що ця функція дозволяє обчислювати суму добутків відповідних елементів масивів (у нашому випадку – елементів двох масивів $C\{c_{ij}\}$ та $X\{x_{ij}\}$).

4. Набути навиків розв'язання розподільчих (транспортних) задач із додатковими обмеженнями.

Розподільчі (транспортні) задачі мають дві основні групи обмежень – групу обмежень по вивезенню продукції (розподілу усіх наявних ресурсів) та групу обмежень по задоволенню попиту споживачів (задоволення потреб у ресурсах).

В математичних моделях обмеження закритих розподільчих (транспортних) задач записуються відповідно як

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}.$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}$$

В Excel для запису лівої частини цих обмежень слід використати Автосуму – вбудовану функцію =СУММ().

Окрім означених двох груп обмежень у задачі можуть вводитися й інші обмеження – вони називатимуться *додатковими обмеженнями*, наприклад, у розподільчі задачі – на якомусь конкретному полі заданої площі, згідно сівозмін, має бути посіяно певна культура, або в транспортній задачі – необхідно згідно укладених договорів перевезти не менше чи не більше заданої кількості продукції. В Excel для запису таких додаткових обмежень використовується посилання на чарунки, відведені для шуканих значень невідомих.

5. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл laboratorna_5.xlsx.

**Завдання для практичного виконання,
порядок і методика щодо їх виконання**

Вправа 1. Навчитися здійснювати постановку та математичне формулювання транспортних (розподільчих) задач

1. Наведіть математичну модель транспортної закритої задачі (запишіть систему обмежень, умову невід'ємності та цільову функцію).
2. Дайте визначення закритої та відкритої транспортної задачі.
3. Вкажіть методи розв'язання транспортних (розподільчих) задач.

4. Запишіть відомі Вам способи побудови опорного плану у першій транспортній таблиці.
5. Ознайомтеся з умовою *прикладу 1* та виконайте математичне формулювання задачі.

Приклад 1

ЗАКРИТА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

У господарстві на чотирьох ділянках за готовили 400 т сіна: на першій ділянці – 60 т, на другій – 100 т, на третій – 160 т і на четвертій – 80 т. Сіно необхідно перевезти до трьох молочно-товарних комплекси (МТК): на перший – 120 т, на другий – 180 т, на третій – 100 т. Відстань від ділянок до МТК задана матрицею C :

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Скласти такий план перевезення сіна, при якому обсяг транспортних робіт буде мінімальним.

Опорний план побудувати за способом північно-західного кута.

Вправа 2. Засвоїти алгоритм розв'язання розподільчих (транспортних) задач методом потенціалів

1. Відповідно до побудованої моделі, розв'яжіть транспортну задачу аграрного виробництва *приклад 1* вручну методом потенціалів.

Блок транспортних таблиць

Ділянки	Молочно-товарні комплекси			Запаси A_i, t	u_i
	1	2	3		
1	5	3	7		$u_1 =$
2	2	4	6		$u_2 =$
3	4	7	8		$u_3 =$
4	6	2	3		$u_4 =$
Потреби B_j, t					x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	x	$Z_1 =$

Ділянки	Молочно-товарні комплекси			Запаси A_i, t	u_i
	1	2	3		
1	5	3	7		$u_1 =$
2	2	4	6		$u_2 =$
3	4	7	8		$u_3 =$
4	6	2	3		$u_4 =$
Потреби B_j, t					x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	x	$Z_2 =$
1	5	3	7		$u_1 =$
2	2	4	6		$u_2 =$
3	4	7	8		$u_3 =$
4	6	2	3		$u_4 =$
Потреби B_j, t					x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	x	$Z_3 =$
1	5	3	7		$u_1 =$
2	2	4	6		$u_2 =$
3	4	7	8		$u_3 =$
4	6	2	3		$u_4 =$
Потреби B_j, t					x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	x	$Z_4 =$

2. Сформулюйте і запишіть відповідь до *прикладу 1*.

3. Розв'яжіть ще одну розподільчу задачу аграрного виробництва **приклад 2** вручну методом потенціалів.

Приклад 2

ЗАКРИТА РОЗПОДІЛЬЧА ЗАДАЧА

У господарстві планується посіяти ячмінь – на площі 400 га, овес – на площі 420 га, кукурудзу – на площі 680 га.

Для вирощування даних зернофуражних культур відведено чотири поля, площі яких відповідно дорівнюють 350, 300, 480 та 370 га.

Урожайності культур на полях різняться у залежності від попередників і задані матрицею C :

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 29 & 27 & 22 \\ 16 & 25 & 24 & 19 \\ 27 & 34 & 30 & 29 \end{pmatrix}$$

Скласти такий план розподілу культур за полями, щоб отримати максимум зернофуражу.

Опорний план побудувати за способом найкращої оцінки в стовпчику.

Блок транспортних таблиць

Культури	Поля				Запаси A_i , га	u_i
	1	2	3	4		
ячмінь	20	29	27	22		$u_1 =$
овес	16	25	24	19		$u_2 =$
кукурудза	27	34	30	29		$u_3 =$
Потреби B_j , га						x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_1 =$
ячмінь	20	29	27	22		$u_1 =$
овес	16	25	24	19		$u_2 =$
кукурудза	27	34	30	29		$u_3 =$
Потреби B_j , га						x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_2 =$

Культури	Поля				Запаси A_i , га	u_i
	1	2	3	4		
ячмінь	20	29	27	22		$u_1 =$
овес	16	25	24	19		$u_2 =$
кукурудза	27	34	30	29		$u_3 =$
Потреби B_j , га						x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_3 =$

4. Сформулюйте і запишіть відповідь до **прикладу 2**.
5. Наведіть загальну математичну модель відкритої розподільчої (транспортної) задачі (запишіть систему обмежень, умову невід'ємності та цільову функцію).
6. Дайте визначення відкритої розподільчої (транспортної) задачі.
7. Вкажіть способи зведення відкритих розподільчих задач до закритих.
8. Запишіть відомі Вам способи розв'язання відкритих розподільчих задач.
9. Розв'яжіть наведену нижче розподільчу (транспортну) задачу аграрного виробництва вручну методом потенціалів (рекомендується в позааудиторний час).

Приклад 3

ВІДКРИТА РОЗПОДІЛЬЧА ЗАДАЧА

На трьох ділянках господарства, площа яких складає відповідно 40 га, 32 га та 68 га необхідно вирощувати цибулю, моркву, помідори та огірки на площі 35, 30, 48, 37 га відповідно.

Запланований прибуток в ум. грошових одиницях від реалізації овочів з 1 га кожної задано матрицею C :

$$C = \begin{pmatrix} 200 & 290 & 270 & 220 \\ 160 & 250 & 240 & 190 \\ 270 & 340 & 300 & 290 \end{pmatrix}$$

Спланувати таке розміщення культур за полями, щоб отримати максимум прибутку. Для побудови опорного плану обрати спосіб найкращої оцінки в матриці.

Блок транспортних таблиць:

Ділянки	Культури				A_i, m	u_i
	цибуля	морква	помідори	огірки		
1	200	290	270	220	40	$u_1 =$
2	160	250	240	190	32	$u_2 =$
3	270	340	300	290	68	$u_3 =$
4	0	0	0	0	10	$u_3 =$
B_j, m	35	30	48	37	150	x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_1 =$
1	200	290	270	220	40	$u_1 =$
2	160	250	240	190	32	$u_2 =$
3	270	340	300	290	68	$u_3 =$
4	0	0	0	0	10	$u_3 =$
B_j, m	35	30	48	37	150	x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_2 =$
1	200	290	270	220	40	$u_1 =$
2	160	250	240	190	32	$u_2 =$
3	270	340	300	290	68	$u_3 =$
4	0	0	0	0	10	$u_3 =$
B_j, m	35	30	48	37	150	x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_3 =$

10. Сформулюйте і запишіть відповідь до *прикладу 3*.

Вправа 3. Навчитися розв'язувати розподільчі (транспортні) задачі на ПК у програмі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения

1. Поміркуйте, якщо вихідні дані у транспортній задачі задані матрицею C (розміром $m \times n$), то в табличному процесорі вони являтимуть собою _____
2. Відповідно, шукані значення поставок X_{ij} в Excel теж являтимуть собою _____
3. Визначте, які дві основні групи обмежень задають при розв'язанні ТЗ. Поміркуйте, яку вбудовану функції Microsoft Excel краще використати для запису лівої частини кожного обмеження _____
4. Запишіть загальну формулу цільової функції у транспортній задачі у скороченому та розширеному вигляді
 $Z =$ _____
_____ $\rightarrow$ _____

Поміркуйте, яку вбудовану функції Microsoft Excel краще використати для запису цільової функції _____

Вкажіть, до якої категорії функцій вона відноситься _____

5. Завантажте програму Microsoft Excel. Надайте активному аркушу назву Закрита ТЗ.
6. Розв'яжіть наведену нижче задачу на аркуші Закрита ТЗ, використовуючи засіб Поиск решения Microsoft Excel.

Приклад 4.

Для оптимізації зовнішньогосподарських перевезень у ДП Агрофірмі Оріон», потрібно скласти план перевезення молока від трьох молочно-товарних ферм даного господарства до трьох підприємств-переробників продукції, щоб загальний обсяг транспортних робіт в тонно-кілометрах був мінімальним.

Причому, мають виконуватись наступні умови: весь товар має бути вивезеним від кожної молочної ферми – 30, 12, 39 ц відповідно, кожному споживачу має бути доставлена саме потрібна кількість молока – ЗАТ «Пирятинському сирзаводу» - 39 ц, ВАТ «Хорольський МКК ДП» - 13 ц, ВАТ «Лубенському молочному заводу» – 29 ц. Відстані між підприємствами задані матрицею C

$$C = \begin{pmatrix} 90 & 17 & 35 \\ 79 & 21 & 27 \\ 70 & 25 & 49 \end{pmatrix}$$

7. У чарунки введіть вихідні дані – матрицю відстаней між підприємствами.
8. Відведіть чарунки для результату – шуканих обсягів перевезення молока.
9. У окремі чарунки введіть формули лівої частини кожного обмеження, знак і значення правої частини кожного обмеження по вивозу продукції.
10. Аналогічно введіть у окремі чарунки формулу для лівої частини, знак та значення правої частини кожного обмеження по задоволенні попиту на молоко.
11. У чарунку введіть формулу для цільової функції.
12. Виконайте команду **Данные**⇒ **Поиск решения** (**Сервис**⇒**Поиск решения**) та у діалоговому вікні задайте відповідні опції.
13. Проаналізуйте результат і сформулюйте відповідь до задачі. Збережіть результат роботи у Вашій папці диску D з іменем *laboratorna_5.xlsx*.
14. У файлі *транспорт_1.xls* додайте новий аркуш до робочої книги Надайте новому аркушу назву **Відкрита ТЗ**.
15. На аркуші **Відкрита ТЗ**, використовуючи засіб **Поиск решения** Microsoft Excel розв'яжіть **Приклад 5** (рис. 5.1). Проаналізуйте отриманий результат

Приклад 5.

У чотирьох фермерських господарствах області зібрали 8000 т цукрових буряків: у ФГ „Урожай” – 1200 т, у ФГ „Мрія” – 2000 т, у ФГ „Рост” – 3200 т і у ФГ „Хлібодар” – 1600 т. Буряки планується перевезти до трьох цукрових заводів: перший завод готовий прийняти від фермерських господарств 2400 т, другий – 2600 т, третій – 2000 т. Відстань від господарств до заводів задана матрицею С:

$$C = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 70 \\ 20 & 40 & 60 \\ 40 & 70 & 80 \\ 90 & 20 & 70 \end{pmatrix}$$

Скласти такий план перевезення буряків, при якому обсяг транспортних робіт буде мінімальним.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗПОДІЛЬЧИХ (ТРАНСПОРТНИХ) ЗАДАЧ							
2								
3	Відстані від постачальників до споживачів, км							
4		Цукрові заводи						
5		1	2	3	4ф			
6	ФГ "Урожай"	50	30	70	0			
7	ФГ "Мрія"	20	40	60	0			
8	ФГ "Рост"	40	70	80	0			
9	ФГ "Хлібодар"	90	20	70	0			
10								
11	Шукані обсяги перевезень, т							
12		Цукрові заводи				Запаси, т		
13		1	2	3	4ф			
14	ФГ "Урожай"					0	=	1200
15	ФГ "Мрія"					0	=	2000
16	ФГ "Рост"					0	=	3200
17	ФГ "Хлібодар"					0	=	1600
18		0	0	0	0			8000
19	Потреби, т	=	=	=	=		=	
20		2400	2600	2000	1000	8000	=	8000
21								
22	Мнімальний обсяг транспортних робіт, т-км							0

Рис. 5.1. Оформлення відкритої транспортної задачі

Вправа 4. Набути навиків розв'язання розподільчих (транспортних) задач із додатковими обмеженнями

1. У файлі *laboratorna_5.xlsx* вставте новий аркуш.
2. Надайте новому аркушу назву Додаткові ТЗ.
3. На аркуші Додаткові_ТЗ, використовуючи засіб Поиск решения Microsoft Excel, розв'яжіть задачу з додатковими обмеженням Приклад 3.

Приклад 6.

У групі господарств необхідно розширити площі посіву ярих культур. Планові урожайності цих культур, площі, що підлягають пересіву, та можливі площі посіву окремих ярих культур наведені на рис. 5.2. Необхідно скласти план розміщення зернових культур, який забезпечив би максимальне збільшення виробництва зерна з урахуванням наступного:

- а) перше господарство має запаси насіннєвого матеріалу, що дозволять посіяти горох на площі 120 га, а ячмінь на площі не більшій 440 га;
- б) запаси пально-мастильних матеріалів у другому господарстві дозволять засіяти не гороху на площі не більше 550 га;
- в) система сівозмін третього господарства не передбачає висівання вівса.

Розв'язання цієї задачі у середовищі MS Excel з використанням засобу Поиск решения здійснюється аналогічно до попередніх задач, що й продемонстровано на рис. 5.2 – 5.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
10	Обсяги поставок, т							
11								
12	Поста- чальники	Споживачі				Запаси, т		
13		1	2	3	4			
14	1	130	0	190	0	320	=	320
15	2	0	0	160	120	280	=	280
16	3	0	100	50	110	260	=	260
17	4	80	90	0	70	240	=	240
18	Потреби, т	210	190	400	300			1100
19		II	II	II	II			II
20		210	190	400	300	1100	=	1100
21	Мінімальна загальна вартість транспортування в грн. становить				25442			
22								
23								

Рис. 5.2. Результат роботи засобу Поиск решения для Транспортної задачі з додатковими обмеженнями

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Урожайності культур у різних господарствах, ц/га								
2									
3	Госпо- дарства	Культури					Площі А, га		
4		горох	овес	просо	ячмінь	фіктієна			
5	1	19	18	14	26	0	=СУММ(B13:F13)	=	930
6	2	24	18	15	23	0	=СУММ(B14:F14)	=	600
7	3	21	19	16	24	0	=СУММ(B15:F15)	=	700
8									
9	Обсяги поставок, т								
10									
11	Госпо- дарства	Культури					Площі А, га		
12		горох	овес	просо	ячмінь	фіктієна			
13	1						=СУММ(B13:F13)	=	930
14	2						=СУММ(B14:F14)	=	600
15	3						=СУММ(B15:F15)	=	700
16	Площі В, га	=СУММ(B13:B15)	=СУММ(C13:C15)	=СУММ(D13:D15)	=СУММ(E13:E15)	=СУММ(F13:F15)	=СУММ(I13:I15)		
17		II	II	II	II	II	II		
18		730	400	190	580	330	=СУММ(B18:F18)	=	2230
19	Максимальний збір ярих культур по трьох господарствах, ц					=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B13:F15)			
20									
21									

Рис. 5.3. Оформлення відкритої розподільчої задачі з додатковими обмеженнями

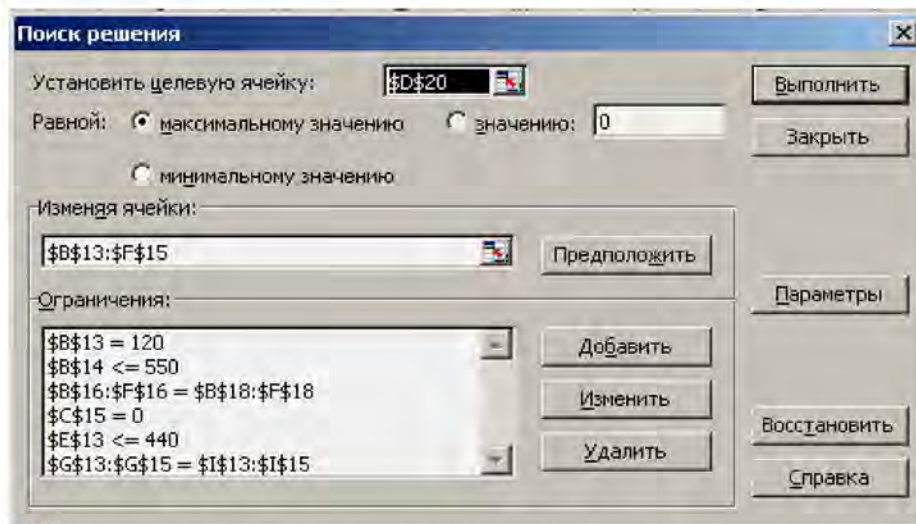


Рис. 5.4. Вигляд вікна Поиск решения із цільовою функцією на максимум

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9	Объёмы поставок, т								
10									
11	Госпо-	Культури					Площі A ₁ , га		
12	дарства	горох	овес	просо	ячмінь	фіктивна			
13	1	120	370	0	440	0	930	=	930
14	2	550	30	0	0	20	600	=	600
15	3	60	0	190	140	310	700	=	700
16	Площі B ₂ , га	730	400	190	580	330			2230
17		II	II	II	II	II			II
18		730	400	190	580	330	2230	=	2230
19	Максимальний збір ярих культур по трьох господарствах, ц								
20				41780					

Рис. 5.5. Результат роботи засобу Поиск решения

- Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_5.xlsx* і завершіть роботу з табличним процесором.
- Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіт оформлюються на стандартних аркушах формату A4 (210×297 мм); поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, умови задач прикладів 1, 2, 5, 6, їх математичні моделі, розв'язок (роздрукований на принтері файл *laboratorna_5.xlsx*), відповідь до даних задач і практичні рекомендації аграрному виробництву.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію, маючи електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. У чому проявляється негативний вплив транспорту на довкілля.
2. Шляхи зменшення негативної дії транспорту.
3. Наведіть загальну постановку транспортної задачі.
4. Наведіть приклади задач оптимального розподілу ресурсів.
5. Які основні два класи розподільчих задач Вам відомі?
6. Способи розв'язання розподільчих (транспортних) задач.
7. Алгоритм методу потенціалів.
8. Які існують способи побудови опорного плану при розв'язанні задачі методом потенціалів?
9. Умова оптимальності в транспортній задачі при розв'язанні її методом потенціалів.
10. Формула розрахунку системи потенціалів.
11. Як перейти від відкритої розподільчої (транспортної) задачі до закритої?
12. Як визначити потребу фіктивного споживача у ресурсі (вантажі)?
13. Яка надбудова табличного процесора Microsoft Excel дозволяє розв'язувати розподільчі задачі?
14. Опишіть алгоритм розв'язання закритої транспортної (розподільчої) задачі у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
15. Як у розподільчій (транспортній) задачі задати додаткові обмеження при розв'язанні її у Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения?

Список рекомендованої літератури:

1. Булига К. Б. Комп'ютерний практикум із застосуванням математичних методів в економіці / К. Б. Булига, В.М. Михайленко. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 67 с.

2. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. - М.: Агропромиздат, 1990.
3. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике / П.Конюховский. – Санкт-Петербург: Питер, 2000. – 208 с.
4. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов.– К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.
5. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.– 277 с.
6. Шелобаев С.И. Математические методы и модели / С.И.Шелобаев. – Москва: ЮНИТИ, 2000. – 368 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

Тема: Розв'язування задач теорії ігор із використанням можливостей табличного процесора Microsoft Excel

Мета: Навчитися розв'язувати задачі з умовами невизначеності та конфлікту в екології у чистих та змішаних стратегіях

Завдання:

1. Засвоїти основні поняття теорії ігор. Навчитися здійснювати постановку задач.
2. Навчитися розв'язувати задачі теорії ігор у чистих стратегіях.
3. Навчитися приводити задачі теорії ігор до задач лінійного програмування та знаходити розв'язки задач у змішаних стратегіях.
4. Набути навиків розв'язання задач теорії ігор на ПК у табличному процесорі Microsoft Excel.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – текстовим процесором Microsoft Word та табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

У природокористуванні часто доводиться мати справу з задачами, де є елемент невизначеності та ризику. Наприклад, обрати сорт культури, що дозволить підвищити урожайність, не маючи точного прогнозу погоди. Такого типу задачі відносяться до теорії ігор.

Теорія ігор може й повинна знайти широке застосування при розв'язанні задач агропромислового спрямування, бо дозволяє суттєво зменшити рівень невизначеності при прийнятті управлінських рішень з метою забезпечення цілеспрямованих дій по підвищенню ефективності функціонування АПК. Переваги даного підходу полягають, як це не дивно, у його песимістичності, а саме – методи теорії ігор дозволяють знайти найкращий гарантований результат із найгірших можливих варіантів. Це дає змогу обрати стратегію вирощування культур, технологію обробітку, стратегію розвитку і т.п., які за будь-яких зовнішніх умов надаватимуть можливість отримати хоча й мінімальний, але гарантований прибуток.

Теорія ігор – це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають **іграми**.

У ході гри кожен з гравців застосовує систему правил, яка однозначно визначає вибір його поведінки при кожному ході залежно від ситуації, яка складається у процесі гри. Така система правил називається **стратегією гравця**. Закон відповідності між набором можливих ситуацій певної гри та виграшем конкретного гравця називається функцією виграшу або функцією платежів.

Ігри, в яких дії гравців направлені на максимізацію виграшів колективом (коаліцією) без подальшого розподілу виграшу між учасниками гри, називаються коаліційними. Ігри, в яких метою кожного учасника є отримання по можливості більшого індивідуального виграшу, називаються некоаліційними. Безкоаліційна гра називається грою з постійною сумою, якщо існує така константа C , що $\sum_{k \in K} H_k(s) = C$ для всіх можливих ситуацій $s \in S$.

Ситуація s у грі називається прийнятною або допустимою для гравця k , якщо цей гравець, змінюючи в ситуації, що склалася, свою стратегію sk на іншу sk' , не зможе зменшити свого виграшу. Ситуація s , що є прийнятною для усіх гравців, називається ситуацією рівноваги. *Процес знаходження ситуації рівноваги і є процесом розв'язання гри.*

Гра називається **парною**, якщо у ній стикаються інтереси двох супротивників. Якщо ж супротивників у грі більше двох, то така гра називається множинною. Гра називається з нульовою сумою, якщо один гравець виграє стільки, скільки другий програє в цій же партії. Кожна фіксована стратегія, яку може вибрати гравець, називається його **чистою стратегією**.

Матричною називають парну гру з нульовою сумою при умові, що кожен гравець має скінчене число чистих стратегій. Якщо перший гравець має m чистих стратегій, а другий – n , то парна гра з нульовою сумою формально описується системою чисел – матрицею $\|a_{ij}\|_{m \times n}$, елементи якої ви-
значають виграш першого гравця (і відповідно програш другого). Матрицю $\|a_{ij}\|$ називають платіжною матрицею або матрицею гри, в якій i - тий рядок – це i -та стратегія першого гравця, а j -тий стовпчик – це j -та стратегія другого гравця.

Більшість реальних виробничих ситуацій, які можна змоделювати за допомогою теорії ігор, дуже рідко мають розв'язок у чистих стратегіях, а тому пошук розв'язків здійснюється у змішаних стратегіях.

Задачею кожного з гравців є максимізація свого виграшу. Максимізація виграшу першого гравця еквівалентна мінімізації виграшу другого і навпаки – максимізація виграшу другого гравця еквівалентна мінімізації виграшу першого. Задача максимізації гарантованого виграшу першого гравця і задача мінімізації гарантованого програшу другого гравця зводиться до пари взаємно-двоїстих задач лінійного програмування:

Якщо позначити:

- а) через $x_1, x_2, \dots, x_m$ ймовірності (частоти), з якими перший гравець вибирає відповідно першу, другу, $\dots$, m -ну чисті стратегії так, що

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad (i = \overline{1, m});$$

- б) через $y_1, y_2, \dots, y_n$ ймовірності, з якими другий гравець вибирає першу, другу, $\dots$, n -ну чисті стратегії, причому

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \quad (j = \overline{1, n}),$$

то набори чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ називаються **змішаними стратегіями** першого і другого гравців відповідно.

Задача першого гравця

$$\begin{aligned} F = v \quad \max \quad & \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i &\geq v \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Задача другого гравця

$$\begin{aligned} \Phi = u \quad \min \quad & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j &\leq u \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1 \\ y_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Розв'язати матричну гру у змішаних стратегіях можна:

- на основі аналітичних розрахунків;
- використовуючи графічний спосіб (ігри 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$);
- після приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування із наступним розв'язанням за алгоритмом вивченого симплекс-методу, або із використанням ПК у середовищі електронних таблиць MS Excel за допомогою засобу Поиск решения.

Порядок і методика виконання завдань

1. Засвоїти основні поняття теорії ігор. Навчитися здійснювати постановку задач.

На основі теоретичного матеріалу лекцій, навести визначення основних термінів теорії ігор: поняття «гри», типи ігор, стратегія гравця, платіжна матриця, ситуація рівноваги, сідловка точка тощо. Узагальнити та структуруйте знайдену інформацію. Познайомитися з загальною постановкою запропонованих задач теорії ігор.

2. Навчитися розв'язувати задачі теорії ігор у чистих стратегіях.

Теорія ігор може й повинна знайти широке застосування при розв'язанні задач агропромислового спрямування, бо дозволяє суттєво зменшити рівень невизначеності при прийнятті управлінських рішень з метою забезпечення цілеспрямованих дій по підвищенню ефективності функціонування АПК. Переваги даного підходу полягають, як це не дивно, у його песимістичності, а саме – методи теорії ігор дозволяють знайти найкращий гарантований результат із найгірших можливих варіантів. Це дає змогу обрати стратегію вирощування культур, технологію обробітку, стратегію розвитку і т.п., які за будь-яких зовнішніх умов надаватимуть можливість отримати хоча й мінімальний, але гарантований прибуток.

Задачею кожного з гравців у парній грі є максимізація свого виграшу. Максимізація виграшу першого гравця еквівалентна мінімізації виграшу другого і навпаки – максимізація виграшу другого гравця еквівалентна мінімізації виграшу першого.

Гарантований виграш першого гравця, який застосовує фіксовану (чисту) i -ту стратегію, визначається так:

$$\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \quad (6.1)$$

Число $\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \right\}$ називається нижнім значен-

ням гри, а чиста стратегія i_0 , при якій досягається $\underline{V}$, називається максимінною

стратегією. Аналогічно, число $\bar{V} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \right\}$ називається верхнім

значенням гри, а j_0 – мінімаксною стратегією другого гравця.

Завжди має місце $\underline{V} \leq \bar{V}$. Якщо $\underline{V} = \bar{V} = V$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях, а число V називається значенням гри (або ціною гри). Гра має сідлову точку в чистих стратегіях тоді і тільки тоді, коли існує елемент матриці $a_{i_0 j_0}$, який є мінімальним у своєму рядкові i в той же час максимальним у стовпчику, тобто

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \quad (6.2)$$

Будь-яка пара i_0, j_0 , що відповідає (6.2) називається *сідловою точкою*.

Таким чином, розв'язання задачі з умовами невизначеності та конфлікту здебільшого пов'язане з необхідністю вибору *найкращого результату із найгірших* для кожного з гравців. Щоб з'ясувати, чи має матрична гра розв'язок у чистих стратегіях та визначити ціну гри необхідно:

1. Для кожної стратегії *першого* гравця необхідно обрати мінімальне значення виграшу $\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ і серед цих мінімальних значень

обрати гарантований максимум $\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \right\}$

(максимінна стратегія). Наприклад,

Стратегії гравця А	Стратегії гравця В				α_i (min)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	-2	4	-9	5	-9
β_j (max)	8	5	9	8	$\underline{V} = \bar{V} = V = 5$

↑ мінімакс

Додаткові позначення на таблиці: стрілка з α_i на -3 (позначено *min*); стрілка на 5 у рядку A_2 (позначено *максимін*); стрілка на 5 у стовпці B_2 (позначено *ціна гри*).

2. Оскільки у матричній грі виграш першого гравця еквівалентний програшу другого, то для кожної стратегії *другого* гравця слід обрати максимальне значення $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$, а далі серед цих максимальних значень обрати мінімум $\bar{V} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \right\}$ (мінімаксна стратегія).
3. Порівняти отримані значення $\underline{V}$ та $\bar{V}$. Якщо $\underline{V} = \bar{V} = V$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях, а число V називається значенням гри (або ціною гри).

4. Сформулювати відповідь щодо стратегій, які необхідно обрати кожному гравцю, щоб незалежно від дій конкурента отримати гарантований виграш.

Проте слід пам'ятати, що, як правило, у реальних відносинах між об'єктами та при іграх з природою (гра, в якій однією стороною є природа) ситуація, в якій слід використовувати лише одну фіксовану стратегію є малоймовірною, хоча теоретично й можливою. Більшість же реальних виробничих ситуацій, які можна змодельовувати за допомогою теорії ігор, дуже рідко мають розв'язок у чистих стратегіях, а тому пошук розв'язків здійснюється у змішаних стратегіях.

3. Навчитися приводити задачі теорії ігор до задач лінійного програмування та знаходити розв'язки задач у змішаних стратегіях.

Як було зазначено вище, теорія ігор – математична теорія конфліктних ситуацій. Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо. У таких випадках пошук розв'язків задач теорії ігор, здебільшого, здійснюється у змішаних стратегіях.

Для розв'язання типової задачі теорії ігор необхідно:

1. Пересвідчитися, що задача не має розв'язку в чистих стратегіях.
2. Побудувати модель задачі

Позначити через $x_1, x_2, \dots, x_m$ – ймовірності (частоти), з якими перший гравець вибирає відповідно першу, другу, ..., m -ну чисті стратегії так, що

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad (i = \overline{1, m})$$

Цільова функція та система обмежень:

$$\begin{aligned} F &= v \max \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i &\geq v \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

3. Розв'язати задачу теорії ігор за алгоритмами розв'язання задач лінійного програмування або з використанням програмних засобів.

4. Набути навиків розв'язання задач теорії ігор на ПК у табличному процесорі Microsoft Excel.

Для пошуку розв'язку задачі теорії ігор, після побудови моделі задачі та зведення її до задачі лінійного програмування, в середовищі Microsoft Excel слід:

- в окремі чарунки ввести вхідні дані задачі;
- відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
- почергово в окремі чарунки записати формули лівих та значення правих частин кожного обмеження;
- в окрему чарунку записати формулу для цільової функції;
- виконати дію **Данные**⇒**Поиск решения**
- встановити необхідні опції у вікні **Поиск решения** і натиснути **Выполнить**;
- здійснити інтерпретацію отриманого результату, або ж при потребі скорегувати модель і розв'язати задачу з новими вхідними даними.

5. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_6.xlsx*.

**Завдання для практичного виконання,
порядок і методика щодо їх виконання**

Вправа 1. Засвоїти основні поняття теорії ігор. Навчитися здійснювати постановку задач

1. Сформулюйте визначення гри.
2. З'ясуйте суть і призначення теорії ігор.
3. Назвіть основні типи ігрових задач.
4. Повторіть, що в теорії ігор називають стратегією гравця.
5. Окресліть, що в теорії ігор називають процесом розв'язання гри.

Вправа 2. Навчитися розв'язувати задачі теорії ігор у чистих стратегіях

1. Пригадайте, коли гра має сідлову точку і, відповідно, розв'язок гри в чистих стратегіях.

2. Ознайомтеся з наведеними нижче ігровими задачами. Проаналізуйте, до якого типу гри вони відносяться.

Приклад 1

Дві агрофірми A і B займаються вирощуванням та заготівлею лікарських рослин. Агрофірма A рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) та в газетах (A_3). Агрофірма B разом із використанням радіо (B_1), телебачення (B_2) та газет (B_3), розсилає поштою рекламні брошури (B_4). Залежно від якості та інтенсивності проведення рекламної компанії, кожна з агрофірм може залучити до себе частину клієнтів конкуруючого підприємства. Матриця, яка наведена нижче, характеризує процент клієнтів, залучених або втрачених агрофірмою A :

Стратегії рекламної компанії	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	-2	9	-3
A_2	6	5	6	8
A_3	-2	4	-9	5

Чи має матрична гра розв'язок у чистих стратегіях? Якщо має, визначити ціну гри.

Приклад 2

Агрофірма планує посіяти ячмінь одного із трьох сортів (A_1 , A_2 , A_3). Врожаї ячменю багато в чому залежать від погоди. Запланований валовий збір ячменю у грошовому виразі в залежності від погоди (літо посушливе – B_1 , нормальне – B_2 чи дощове – B_3) заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3520 & 4290 & 3740 \\ 3960 & 4400 & 3850 \\ 3300 & 4510 & 3630 \end{pmatrix}$$

З'ясувати, який сорт ячменю доцільно висівати, щоб отримати найбільший валовий збір із гектара у грошовому виразі за умови, що надійний прогноз погоди відсутній.

Приклад 3

В аграрному підприємстві під пшеницю можуть вноситися мінеральні добрива у таких дозах: $N_{30} P_{30} K_{30}$, $N_{45} P_{45} K_{45}$, $N_{60} P_{60} K_{60}$. Очікуване підвищення урожайності в центнерах з 1-го га за рахунок внесення добрив залежно від забезпеченості рослин вологою у загальному вигляді наведено в таблиці:

Дози внесення добрив, кг/га	Рівень забезпеченості вологою		
	низький	середній	високий
$N_{30}P_{30}K_{30}$	4,4	5,7	4
$N_{45}P_{45}K_{45}$	5,0	5,4	5,2
$N_{60}P_{60}K_{60}$	4,8	6,1	7,4

Чи має матрична гра розв'язок у чистих стратегіях? Якщо має, визначити оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

3. Опануйте методику розв'язання прикладу 1.

Методика розв'язання Прикладу 1:

Ознайомившись з визначальними поняттями теорії матричних ігор, можна стверджувати, що розв'язання прикладу 1 пов'язане з необхідністю вибору *найкращого результату із найгірших* для кожного з гравців:

Стратегії рекламної компанії	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i(\min)$
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5 ← максимін
A_3	-2	4	-9	5	-9
$\beta_j(\max)$	8	5 ← мінімакс	9	8	$\underline{v} = \bar{v} = v = 5$ ← ціна гри

Якщо фірма A обере стратегію A_1 , то незалежно від дій фірми B , найгіршим результатом буде – втрата фірмою A до 3% ринку на користь фірми B . Це визначається мінімальним з елементів першого рядка матриці платежів. При виборі стратегії A_2 найгіршим варіантом для фірми A буде збільшення ринку на 5% за рахунок фірми B . Відповідно, найгіршою ситуацією при виборі стратегії A_3 є втрата 9% ринку на користь фірми B . Ці результати знаходяться у стовпчику $\alpha_i(\min)$. Для досягнення найкращого результату з найгірших, фірмі A слід обрати стратегію A_2 , так як вона відповідає найбільшому значенню цього стовпчика.

Розглянемо стратегії фірми B . Так як елементи матриці відповідають платежам фірми A , то критерій найкращого з найгірших результатів для фірми B відповідає вибору мінімаксного значення $\beta_j(\max)$. Висновок – фірма B обирає стратегію B_2 .

Відповідь: розв'язком задачі є вибір стратегій A_2 і B_2 , тобто обом фірмам слід проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь фірми A , її сегмент ринку збільшиться на 5%. Таким чином, задача має розв'язок у чистих стратегіях, тобто має сідлову точку, а ціна гри становить 5.

Аналіз результату розв'язання цієї задачі показує, що фірмам немає сенсу обирати будь-яку іншу стратегію. Дійсно, якщо фірма B перейде до іншої стратегії (B_1 , B_3 чи B_4), то фірма A , дотримуючись стратегії A_2 , що спричинить більшу втрату фірмою B сегменту ринку (6% або 8%). Через ці ж причини, фірмі A немає сенсу використовувати іншу стратегію, бо якщо вона застосує, наприклад, стратегію A_3 , то фірма B може використати стратегію B_3 і збільшить свій ринок на 9%. Аналогічний висновок має місце для випадку, коли фірма A буде застосовувати стратегію A_1 .

4. Завантажте текстовий процесор Microsoft Word. У новому документі уведіть умови та наведіть розв'язок прикладів 2 і 3.
5. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_6.docx* та завершіть роботу з програмним засобом.

Вправа 3. Навчитися приводити задачі теорії ігор до задач лінійного програмування та знаходити розв'язки задач у змішаних стратегіях

1. Пригадайте, коли задача теорії ігор не має розв'язок у чистих стратегіях. Коли гра має розв'язок у змішаних стратегіях?
2. Опануйте алгоритм приведення задачі теорії ігор, що має розв'язок у змішаних стратегіях, до задачі лінійного програмування.
3. Пригадайте суть задачі лінійного програмування.
4. Ознайомтеся з умовою задачі прикладу 4. Складіть математичну модель до даної задачі.

Приклад 4.

Знайти розв'язок гри, заданої матрицею

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Методика розв'язання:

У заданій матриці відсутній елемент, який би був мінімальним у своєму рядку й одночасно максимальним у своєму стовпчику. Тобто, задача не має сідлових точок, а, отже, розв'язку у чистих стратегіях.

Знайти розв'язок задачі у змішаних стратегіях можна на основі аналітичних розрахунків; використовуючи графічний спосіб (оскільки маємо гру 4×2), або після приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування із наступним розв'язанням за алгоритмом вивченого симплекс-методу.

Зведемо задачу до задачі лінійного програмування.

Математична модель цієї задачі матиме вигляд:

$$\begin{aligned}2x_1 + 5x_2 &\geq V, \\5x_1 + 3x_2 &\geq V, \\1x_1 + 3x_2 &\geq V, \\4x_1 + 1x_2 &\geq V, \\x_1 + x_2 &= I, \\V &= Z_{\max}.\end{aligned}$$

Виконавши в перших чотирьох нерівностях перенесення V в ліві частини нерівностей, маємо таку задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned}2x_1 + 5x_2 - V &\geq 0, \\5x_1 + 3x_2 - V &\geq 0, \\1x_1 + 3x_2 - V &\geq 0, \\4x_1 + 1x_2 - V &\geq 0, \\x_1 + x_2 + 0V &= I, \\0x_1 + 0x_2 + V &= Z_{\max}.\end{aligned}$$

Для розв'язання отриманої задачі лінійного програмування доцільно скористатися засобом Поиск решения табличного процесора Microsoft Excel.

5. Пригадайте технологію розв'язання задачі лінійного програмування у процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.

Вправа 4. Набути навиків розв'язання задач теорії ігор на ПК у табличному процесорі Microsoft Excel

1. Розв'яжіть задачу, виконавши наведені далі дії..
2. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel.
3. Першому аркушу робочої книги надайте назву Приклад 3.
4. Виконайте підготовчу роботу для розв'язання Прикладу 3 з використанням засобу Поиск решения.
5. Уведіть вхідні дані, відведіть чарунки для результату, запишіть формули обмежень і цільової функції.
6. Для розв'язання задачі завантажте засіб Поиск решения.

На рис. 6.1-6.3 відображені фрагмент електронних таблиць з вхідною інформацією, вікно Параметри поиска решения та фрагмент ЕТ з результатом розв'язання прикладу 3.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача 6.2	X1	X2	V			
2	Шукані значення невідомих						
3		2	5	-1	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;\$B\$2:\$D\$2)	≥	0
4		5	3	-1	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;\$B\$2:\$D\$2)	≥	0
5		1	3	-1	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;\$B\$2:\$D\$2)	≥	0
6		4	1	-1	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;\$B\$2:\$D\$2)	≥	0
7		1	1	0	=СУММПРОИЗВ(B7:D7;\$B\$2:\$D\$2)	=	1
8		0	0	1	=СУММПРОИЗВ(B8:D8;\$B\$2:\$D\$2)		
9	Ціна гри	=E8					

Рис. 6.1. Оформлення Прикладу 3 для її розв'язування з використанням засобу Поиск решения

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения линейных задач симплекс-методом

Рис.6.2. Вміст інформації у вікні Параметри поиска решения перед розв'язуванням прикладу 3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Задача 6.2	X1	X2	V				
2	Шукані значення невідомих							
3		2	5	-1	1,6	≥	0	
4		5	3	-1	1,6	≥	0	
5		1	3	-1	0	≥	0	
6		4	1	-1	0	≥	0	
7		1	1	0	1	=	1	
8		0	0	1	2,2			
9	Ціна гри	2,2						

Рис.6.3. Результат розв'язання Прикладу 3

7. Проаналізуйте отриманий результат та збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_6.xlsx*.
8. Ознайомтеся з умовою задачі прикладу 4. Складіть математичну модель до даної задачі.

Приклад 4

Одним з головних факторів зовнішнього середовища, який істотно впливає на продуктивність корів є температура в приміщенні, де утримуються корови. Середній добовий надій при різних варіантах поживності раціону та температурі навколишнього середовища визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 14 \\ 15 & 17 & 13 \\ 14 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити як залежно від температури навколишнього середовища застосовувати різні раціони годівлі корів.

Методика розв'язання:

Оскільки кожен з трьох раціонів має різну поживність, то позначимо через x_1 , x_2 та x_3 ймовірності застосування у загальному балансі раціонів з найменшою, середньою та найбільшою поживністю відповідно.

Тоді

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Вклад x_1 , x_2 та x_3 та в добовому надоді молока на 1 корову при $t=t_1^\circ\text{C}$ описується нерівністю $12x_1 + 15x_2 + 14x_3 \geq x_4$.

Аналогічні нерівності складаємо для $t=t_2^\circ\text{C}$ та $t=t_3^\circ\text{C}$

$$15x_1 + 17x_2 + 18x_3 \geq x_4, \quad 14x_1 + 13x_2 + 15x_3 \geq x_4,$$

де x_4 – оптимальний середньодобовий надій молока на 1 корову.

$$x_4 = Z_{\max}.$$

Виконавши перенесення x_4 в ліву частину нерівностей, маємо таку задачу лінійного програмування

$$12x_1 + 15x_2 + 14x_3 - x_4 \geq 0,$$

$$15x_1 + 17x_2 + 18x_3 - x_4 \geq 0,$$

$$14x_1 + 13x_2 + 15x_3 - x_4 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = 1,$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = Z_{\max}$$

Модель задачі у середовищі MS Excel виглядає так, як зображено на рис.6.4.

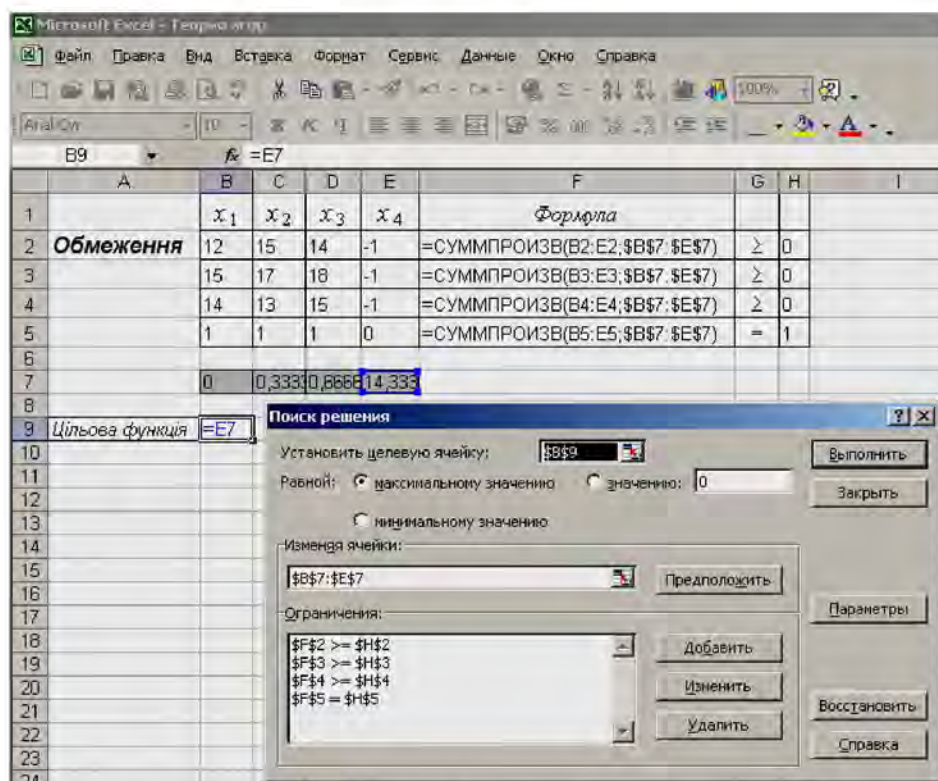


Рис. 6.4. Модель задачі Приклад 4 у середовищі MS Excel та вигляд вікна Поиск решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x_1	x_2	x_3	x_4	Формула		
2	Обмеження	12	15	14	-1	0	≥	0
3		15	17	18	-1	3	≥	0
4		14	13	15	-1	0	≥	0
5		1	1	1	0	1	=	1
6								
7			0,33	0,67	14,33			
8								
9	Цільова функція		14,33					

Рис. 6.5. Розв'язок задачі Приклад 4

Використавши засіб Поиск решения, отримуємо наступний результат: $x_1=0$; $x_2=0,33$; $x_3=0,67$; $x_4=14,33$ (рис. 6.5). Тобто, якщо перший раціон матиме поживність 10, другий – 11, а третій – 12 корм. од., то щоб гарантувати надій молока від корови 14,333 кг при температурі, яка змінюється в межах від $t_1^{\circ}\text{C}$ по $t_3^{\circ}\text{C}$ (наприклад, від 5°C до 30°C) необхідно мати раціон поживністю $10 \cdot 0 + 11 \cdot 0,333 + 12 \cdot 0,667 = 11,67$ (корм. од.)

- Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_6.xlsx* і завершіть роботу з табличним процесором.
- Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері результуючі документи *laboratorna_6.docx* та *laboratorna_6.xlsx*, що отримані після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Наведіть приклад задачі теорії ігор, що може мати місце у природокористуванні.
2. Що розуміють під стратегією гравця у теорії ігор?
3. Як класифікуються ігри залежно від числа можливих стратегій гравців?
4. Що називають функцією виграшу (функцією платежів)?
5. Які ігри називають коаліційними, а які без коаліційними?
6. Що у теорії ігор називають ситуацією рівноваги?
7. Яка парна гра називається грою з нульовою сумою? Яку парну гру з нульовою називають матричною?
8. Як визначається гарантований виграш першого гравця, який у матричній грі застосовує i -ту стратегію?
9. Що розуміють під нижнім значенням матричної гри?
10. Коли матрична гра має сідлову точку у чистих стратегіях?
11. Що у матричній грі називають змішаними стратегіями першого і другого гравців?
12. Що називається оптимальною стратегією першого гравця у матричній грі, яка має розв'язок у змішаних стратегіях?
13. Назвіть способи розв'язання матричної гри у змішаних стратегіях?
14. У чому суть приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування?
15. Чому елементи теорії ігор знаходять своє застосування при розв'язанні задач агропромислового спрямування?

Список рекомендованой литературы:

1. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. - М.: Агропромиздат, 1990.
2. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике / П.Конюховский. – Санкт-Петербург: Питер, 2000. – 208 с.
3. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я.Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.
4. Шелобаев С.И. Математические методы и модели / С.И.Шелобаев. – Москва: ЮНИТИ, 2000. – 368 с.

ТЕМА 5. АНАЛІЗ ПРИЧИННО-НАСЛІДКОВИХ ЗВ'ЯЗКІВ У СИСТЕМАХ І ПРОГНОЗУВАННЯ ЇХ РОЗВИТКУ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7

Тема: Тенденції розвитку систем: моделі тренду для аналізу процесів і явищ та прогнозування стану довкілля засобами Excel

Мета: Вивчення методів дослідження тенденцій розвитку систем на основі моделей тренду у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения

Завдання:

1. Підготовка статистичних даних щодо стану навколишнього середовища, введення їх у чарунки табличного процесора Microsoft Excel.
2. Візуальне відображення статистичних даних за допомогою графіків і діаграм.
3. Застосування можливостей табличного процесора Microsoft Excel для побудови лінії тренду.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Персональний комп'ютер, із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel, та під'єднанням до мережі Internet

ПОЯСНЕННЯ, ВКАЗІВКИ

Теоретичні відомості

Одним із методів короткострокового прогнозування є трендова модель, основою якої також є часові ряди (ряди динаміки). Їх вивчення – це важливий розділ досліджень динаміки розвитку процесу чи явища.

Трендова модель прогнозування – це рівняння, що формалізує закономірності розвитку показника у базисному періоді. Модель застосовується у тому випадку, якщо встановлено, що знайдені закономірності будуть діяти на деякому відрізку часу в майбутньому.

Ряди динаміки можуть бути у вигляді: тренда, лага чи періодичних коливань.

Excel – це табличний процесор, призначений для автоматизації проведення різноманітних розрахунків, аналізу і представлення статистичної, фінансової, економічної та іншої інформації. Вона складається з таблиць, в яких безпосередньо можна проводити калькуляції.

Excel також дозволяє вводити та формувати текстову інформацію для оформлення документації, підтримує обробку, вибірку та фільтрацію даних, що задані у вигляді списку (база даних).

Excel має надбудову Пакет аналізу, що дозволяє проводити різні типи статистичних аналізів і на їх основі складати прогнози.

Порядок і методика виконання завдань

1. Підготовка статистичних даних щодо стану навколишнього середовища, введення їх у чарунки табличного процесора Microsoft Excel.

Для аналізу стану та розвитку будь-якої системи необхідні вхідні дані. Вони можуть бути відображені у певних звітах, літературі, отримані за результатами натурних спостережень тощо. Джерелом даних для дослідження і аналізу стану навколишнього середовища може бути статистична інформація з офіційного сайту Державної служби статистики України

<http://www.ukrstat.gov.ua>

Статистична інформація на даному сайті згрупована по категоріях і за відповідними посиланнями відкривається у формі таблиць, що є зручним для подальшої роботи. Наведені дані можна скопіювати в буфер обміну, а далі вставити у новий документ обраного програмного додатку (з обов'язковим вказанням джерела даних). Більше того, для зручності роботи, на сайті є можливість завантажити окремі дані у вигляді табличного документу табличного процесора Excel.

Звичайно, дані, отримані не з електронних джерел для подальшої їх обробки доведеться вводити безпосередньо із клавіатури.

Якщо для роботи з наявними числовими даними обрано табличний процесор Excel, то кожне число з вибірки даних слід вводити в окрему чарунку.

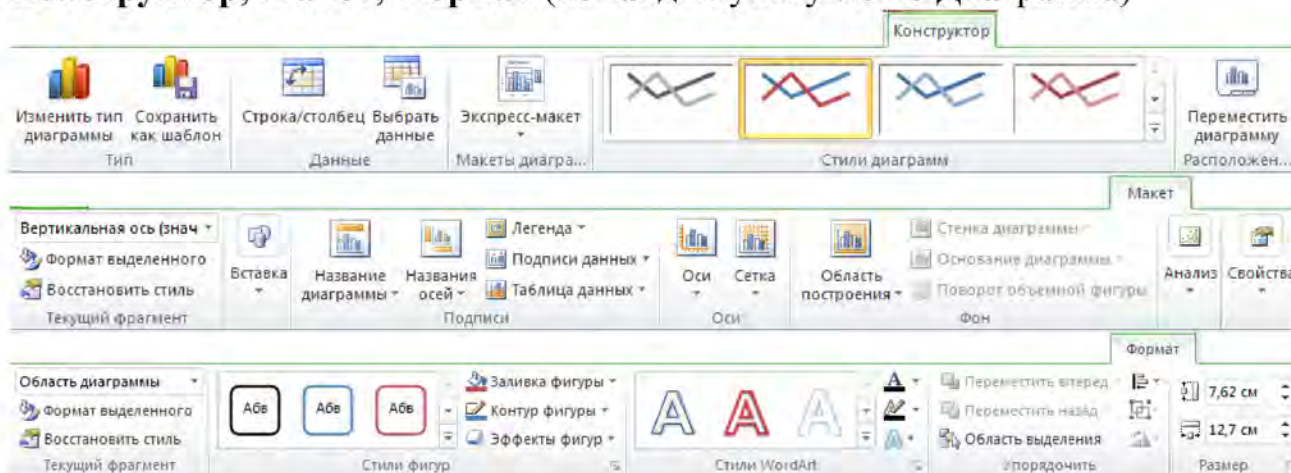
При введенні даних в Excel, що відповідають якій-небудь послідовності, та копіюванні формул доцільно користуватися засобом **Автозаповнення**. Для застосування цього засобу слід встановити покажчик миші на *маркер заповнення*, що знаходиться в нижньому правому кутку табличного курсору, та розтягнути, утримуючи натиснутою ліву кнопку миші.

Аркуші нової робочої книги мають імена Лист1, Лист2 і т.д. Це не дуже інформативно. Аркушам, на яких міститься певна інформація, доцільно надавати таке ім'я, що буде відображати зміст цього аркушу. Для перейменування аркушу слід виконати подвійне клацання на ярлику аркуша, ввести відповідне ім'я та натиснути клавішу [Enter].

2. Візуальне відображення статистичних даних за допомогою графіків і діаграм.

Для візуального відображення числових даних MS Excel надає можливість побудувати різного типу графіки та діаграми. Дані дії відбуваються за командою стрічки **Вставка** ⇒ **Діаграми** (користувачу необхідно обрати потрібний тип діаграми). Для дослідження процесів у динаміці доцільно обирати діаграми типу графік, гістограма, лінійна діаграма тощо.

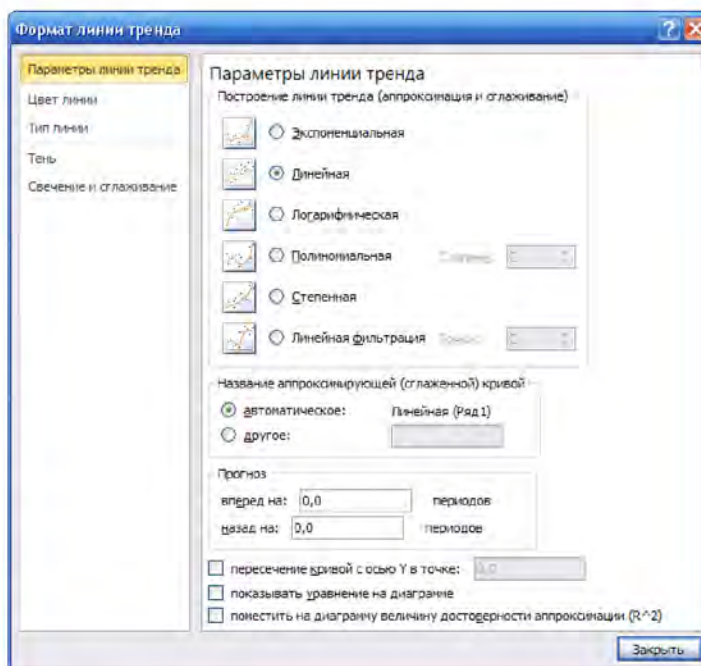
Побудовану діаграму надалі можна відредагувати (змінити або додати / вилучити дані, змінити її місцезонаштування тощо) або ж відформатувати. Для виконання означених дій використовуються кнопки стрічок **Конструктор**, **Макет**, **Формат** (команди пункту меню Діаграма)



3. Застосування можливостей табличного процесора Microsoft Excel для побудови ліній тренду.

Одним із найпростіших методів складання прогнозів є побудова графіка функції, що автоматично підібрана для найбільш точного опису процесу чи явища – побудова лінії тренду.

Для побудови лінії тренду з метою складання прогнозу необхідно за вихідними даними побудувати графік. Далі виділити побудований графік і з контекстного меню обрати команду **Добавить линию тренда**.



Далі слід обрати:

- тип лінії тренду (наприклад, *Лінійну*),
- задати параметри тренду (у даній задачі – кількість періодів для прогнозу, виведення рівняння тренду, виведення значення величини достовірності апроксимації R^2).

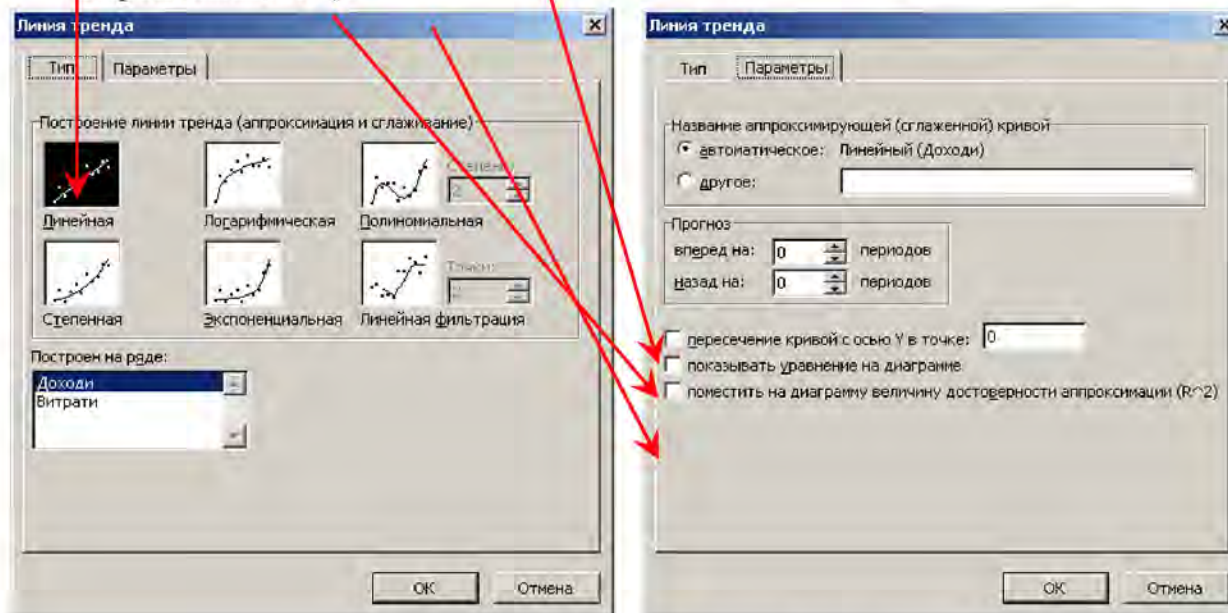


Рис. 7.1. Побудова лінії тренду

4. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_7.xlsx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Завдання:

на основі статистичних даних показника Y за певний період провести економетричний аналіз зміни показника в часі, побудувати чотири моделі тренду за допомогою засобів MS Excel

Вправа 1. Підготовка статистичних даних щодо стану навколишнього середовища, введення їх у чарунки табличного процесора Microsoft Excel

1. Користуючись довільною програмою-браузером, відкрити сайт Державної служби статистики України

<http://www.ukrstat.gov.ua>

- Відшукати статистичну інформацію *Про навколишнє середовище*.
- Відкрити сторінку про *Основні показники використання та охорони водних ресурсів* та ознайомитися із наведеною інформацією.
- Завантажити табличний процесор Microsoft Excel.
- Скопіювати таблицю про *Основні показники використання та охорони водних ресурсів* на *Лист 1* нової книги.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Основні показники використання та охорони водних ресурсів¹							
2								(млн.м ³)
3					У тому числі			
4		Забрано води з природних водних об'єктів ²	Спожито свіжої води ²	Загальне відведення зворотних вод	забруднених (недостатньо очищених)	з них без очищення	нормативно очищених	Потужність очисних споруд
5					усього			
6	1990	35615	30201	20261	3199	470	3318	8131
7	1991	34905	28206	19126	4291	701	2532	7937
8	1992	32461	26924	17872	4008	951	3207	8854
9	1993	24380	24521	16650	4652	1196	2611	8134
10	1994	29499	23468	15869	4873	1053	2075	8775
11	1995	25852	20338	14981	4652	912	1936	8419
12	1996	23477	18668	13998	4109	980	2304	8281
13	1997	21091	15623	12534	4233	763	1798	8271
14	1998	19027	13836	11040	4228	813	1644	8284
15	1999	19748	14285	11488	3920	748	1743	8018
16	2000	18282	12991	10964	3313	758	2100	7992
17	2001	17577	12168	10569	3008	746	2188	7790
18	2002	16299	11589	10005	2920	782	2111	7546
19	2003	15039	11034	9459	2948	804	1946	7733
20	2004	14694	9973	9065	3326	758	1492	7740
21	2005	15083	10188	8900	3444	896	1315	7688
22	2006	15327	10245	8824	3891	1427	1304	8104
23	2007	16352	10995	8917	3854	1506	1245	7768
24	2008	15729	10265	8655	2728	616	1357	7518
25	2009	14478	9513	7692	1766	270	1711	7581
26	2010	14846	9817	8141	1744	312	1760	7425
27	2011	14651	10086	8044	1612	309	1763	7687
28	2012	14651	10507	8081	1521	292	1800	7577
29	2013	13625	10092	7722	1717	265	1477	7592
30	2014	11505	8710	6587	923	175	1416	7190
31	2015	9699	7125	5581	875	184	1389	5801

- Перейменувати аркуш *Лист 1* на аркуш *Статистика*.
- Перейменувати аркуш *Лист 2* на аркуш *Вихідні дані*.
- На аркуші *Вихідні дані* створити макет таблиці для аналізу одного показника за декілька років.

Наприклад, проаналізуємо Об'єм забраної води з природних водних об'єктів за 1990–2013 рр. і побудуємо прогноз на 3 роки.

- Для аналізу даних про *Об'єм забраної води з природних водних об'єктів* скопіювати статистичні дані за 1990 – 2013 рр. з аркушу *Статистика* на аркуш *Вихідні дані*.

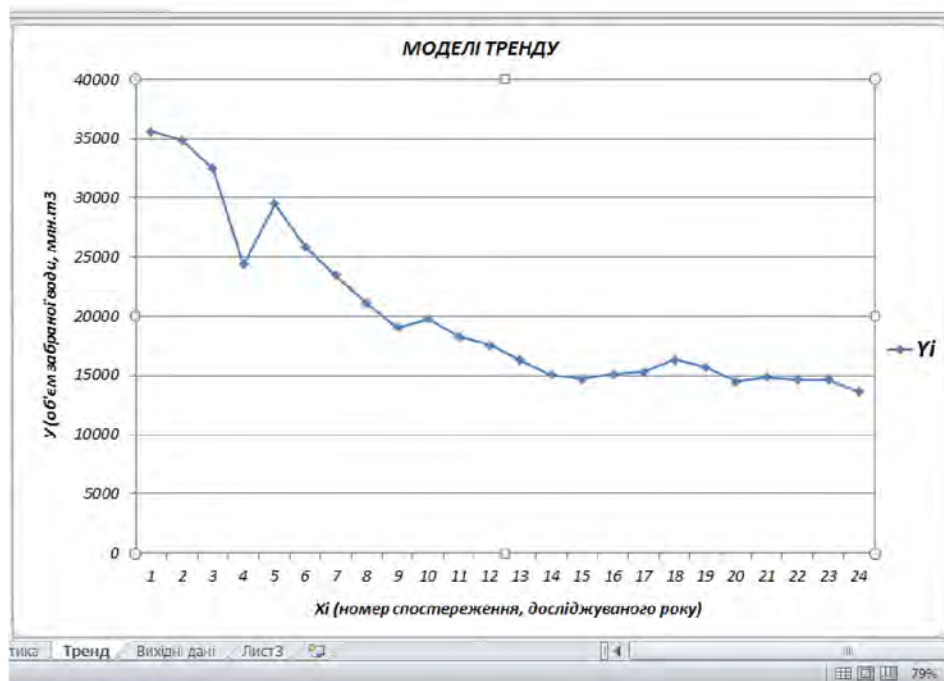
	A	B	C	D	E
1	Об'єм забраної води з природних водних об'єктів, млн.т³				
2					
3	Роки	Хі	Уі	Урозн	
4	1990	1	35615		
5	1991	2	34905		
6	1992	3	32461		
7	1993	4	24380		
8	1994	5	29499		
9	1995	6	25852		
10	1996	7	23477		
11	1997	8	21091		
12	1998	9	19027		
13	1999	10	19748		
14	2000	11	18282		
15	2001	12	17577		
16	2002	13	16299		
17	2003	14	15039		
18	2004	15	14694		
19	2005	16	15083		
20	2006	17	15327		
21	2007	18	16352		
22	2008	19	15729		
23	2009	20	14478		
24	2010	21	14846		
25	2011	22	14651		
26	2012	23	14651		
27	2013	24	13625		
28	прогноз-1	25			
29	прогноз-2	26			
30	прогноз-3	27			
31					
32	Пояснення: Хі - порядковий номер спостереження				
33		Уі- фактичні значення об'єму забраної води;			
34		Урозн- розрахункові значення об'єму забраної			
	ІІІ	ІІІІ	ІІІІІ	ІІІІІІ	ІІІІІІІ
	Статистика	Вихідні дані	Л		

10. Відформатувати таблицю на аркуші *Вихідні дані*, відповідно до наведеного зразка.

Вправа 2. Візуальне відображення статистичних даних за допомогою графіків і діаграм

1. За командою *Вставка* ⇒ *Діаграма* побудувати *Графік* з маркерами на основі фактичних даних показника *Уі* (Об'єм забраної води з природних водних об'єктів).
2. Розмістити діаграму на окремому аркуші, якому надати ім'я *Тренд*.
3. Відформатувати побудований графік за наведеним зразком.
4. Забезпечити виведення на графіку назви діаграми, підписів вздовж осей, легенди.

5. Зберегти результати роботи у Вашій папці диску *D:* з іменем *laboratorna_7.xlsx* та завершити роботу із Microsoft Excel.

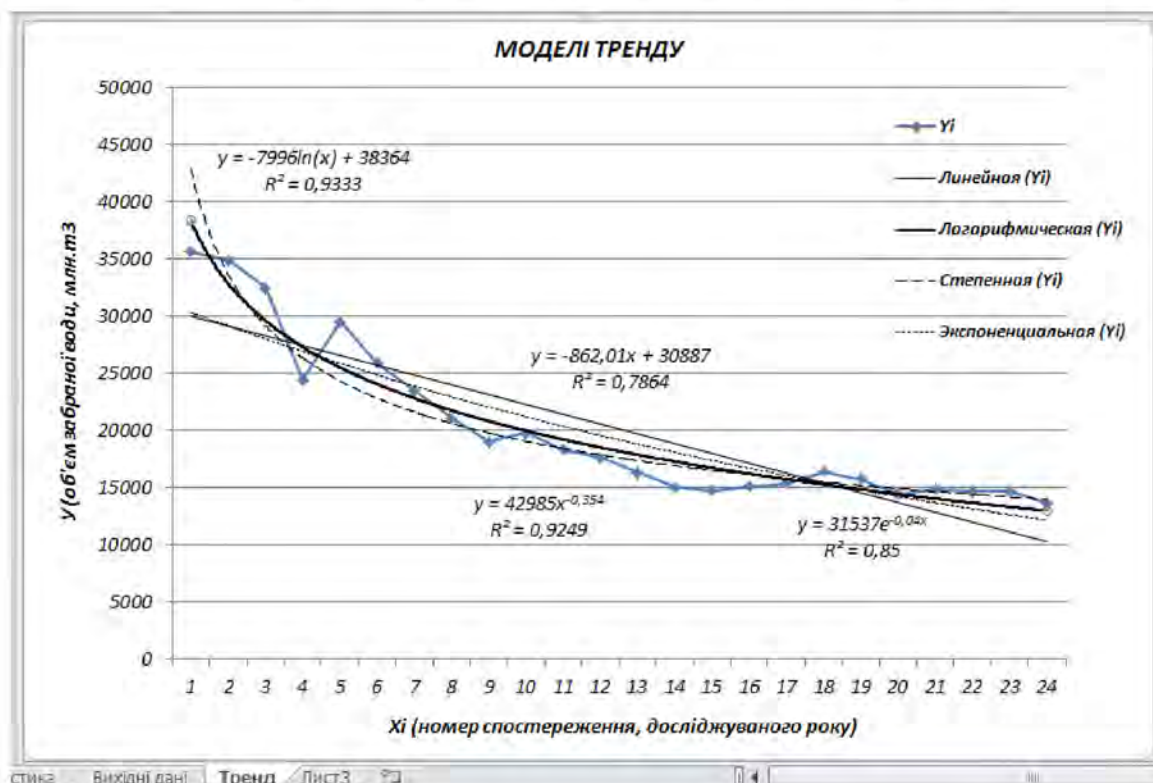


Вправа 3. Застосування можливостей табличного процесора Microsoft Excel для побудови ліній тренду

1. Відкрити файл з Вашої папки диску D:\ з іменем *laboratorna_7.xlsx*.
2. Активізувати аркуш Тренд.
3. На графіку показника Y_i (Об'єм забраної води з природних водних об'єктів), побудувати лінійний тренд.

Для цього:

- виділити натисканням ЛКМ графік;
 - із контекстного меню обрати команду *Добавить линию тренда*;
 - у діалоговому вікні *Линия тренда* обрати відповідний тип лінії тренду (для лінійного тренду – *Линейная*);
 - у діалоговому вікні *Линия тренда* встановити параметри
 - ☒ показывать уравнение на диаграмме;
 - ☒ поместить на диаграмму величины достоверности аппроксимации (R^2)
 - обрати колір лінії тренду і закрити вікно *Линия тренда*.
4. Розмістити підпис рівняння тренду у зручному місці в області діаграми та обрати для нього більший розмір шрифту.
 5. Аналогічно на аркуші *Тренд* побудувати логарифмічний, степеневий та експоненційний тренди та зберегти файл *laboratorna_7.xlsx*



Аналіз результатів дослідження

1. У файлі *laboratorna 7.xlsx* активізувати аркуш Вихідні дані.
2. Створити та заповнити порівняльну таблицю, де вказати отримані значення коефіцієнту детермінації та функціональну залежність для кожної лінії тренду.
3. Визначити за значенням коефіцієнта детермінації найякіснішу модель тренду.
4. У будь-яку вільну чарунку активного аркушу ввести рівняння найякіснішої моделі для *Урозр*, користуючись підписом відповідної формули на аркуші *Тренд*.
5. Для найкращої моделі тренду у таблиці визначити розрахункові значення показника *Урозр* для базисного періоду дослідження (1990-2013 рр.) та прогнозу на наступні три роки.

F	G	H
Порівняльна таблиця		
Лінія тренду	R^2	Функція
Лінійна	0,7864	$y = -862,01x + 30887$
Логарифмічна	0,9333	$y = -7996\ln(x) + 38364$
Степенева	0,9249	$y = 42985x^{-0,354}$
Експоненційна	0,85	$y = 31537e^{-0,04x}$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Об'єм забраної води з природних водних об'єктів, млн.т³					Порівняльна таблиця		
2								
3	Роки	Xi	Yi	Урозр		Лінія тренду	R^2	Функція
4	1990	1	35615	38364,0		Лінійна	0,7864	$y = -862,01x + 30887$
5	1991	2	34905	32821,6		Логарифмічна	0,9333	$y = -7996\ln(x) + 38364$
6	1992	3	32461	29579,5		Степенева	0,9249	$y = 42985x^{-0,354}$
7	1993	4	24380	27279,2		Експоненційна	0,85	$y = 31537e^{-0,04x}$
8	1994	5	29499	25494,9				
9	1995	6	25852	24037,1		Шукана модель:		
10	1996	7	23477	22804,5		$y = -7996\ln(x) + 38364$		
11	1997	8	21091	21736,8				
12	1998	9	19027	20795,0		Висновки:		
13	1999	10	19748	19952,5		Найкращою серед побудованих ліній тренду є логарифмічна модель, оскільки значення коефіцієнта детермінації для цієї функції є найбільшою.		
14	2000	11	18282	19190,4		Побудована логарифмічна модель тренду є адекватною вхідним даним показника У, оскільки значення коефіцієнта детермінації $R^2=0,9333$, що знаходиться в межах 0,75 - 0,9999 і говорить про високий ступінь наближеності математичної моделі вихідним		
15	2001	12	17577	18494,7		Оскільки логарифмічна модель є адекватною (тобто якісною), то її доцільно використовувати для прогнозу досліджуваного показника У на майбутні періоди часу		
16	2002	13	16299	17854,7		Відповідно обраної моделі, прогнозні значення на наступні 2014-2016 рр. складають відповідно 12625,9 млн.т ³ , 12312,3 млн.т ³ , 12010,5 млн.т ³		
17	2003	14	15039	17262,1				
18	2004	15	14694	16710,4				
19	2005	16	15083	16194,4				
20	2006	17	15327	15709,6				
21	2007	18	16352	15252,6				
22	2008	19	15729	14820,3				
23	2009	20	14478	14410,1				
24	2010	21	14846	14020,0				
25	2011	22	14651	13648,0				
26	2012	23	14651	13292,6				
27	2013	24	13625	12952,3				
28	прогноз-1	25		12625,9				
29	прогноз-2	26		12312,3				
30	прогноз-3	27		12010,5				
31								
32	Пояснення Xi - порядковий номер спостереження							
33	Yi- фактичні значення об'єму забраної води;							
34	Урозр- розрахункові значення об'єму забраної води;							
35								

6. Зробити висновки до роботи та записати їх на аркуші *Вихідні дані*:
 - висновки щодо вибору найкращої моделі тренду та обґрунтування вибору;
 - висновки щодо адекватності вибраної (найкращої) моделі тренду;
 - навести вибрану модель тренду в явному вигляді;
 - оцінити можливість використання моделі для прогнозування та аналізу стану навколишнього середовища, зокрема – *Об'єму забраної води з природних водних об'єктів*.
7. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_7.xlsx*
8. Завершіть роботу з табличним процесором.
9. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздрукований на принтері результуючий документ, що отриманий після виконання завдань (аркуш *Вихідні дані* та аркуш *Тренд* файлу *Lab_7.xls* Вашої папки диску *D:*).

Для захисту звіту студенту необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Які засоби автоматизації введення числових даних є в Microsoft Excel?
2. Назвати основні типи діаграм, що можна побудувати у Microsoft Excel.
3. Які способи розміщення діаграм Вам відомі?
4. Як вивести на графіку легенди, підписів осей, назви діаграми?
5. Як змінити тип та колір лінії тренда?
6. Як додати до графіка лінію тренда?

7. Якого параметричного виду можна будувати тренди в Microsoft Excel?
8. Які додаткові надписи можна вивести для ліній трендів?
9. За яким критерієм обирається найякісніша модель?
10. Чи можна на основі моделей тренда отримати прогнозні значення досліджуваного показника щодо стану навколишнього середовища?

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в экологии: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8

Тема: Парна лінійна регресія. Обчислення параметрів лінійної залежності та коефіцієнта кореляції у табличному процесорі Excel

Мета: Опанування підходів до визначення параметрів парної лінійної регресії та оцінювання тісноти зв'язку між показником і факторами при аналізі взаємозалежностей у системах засобами табличного процесора Microsoft Excel

Завдання:

1. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності. Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції.
2. Оцінка параметрів лінійної залежності із використанням надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel.
3. Встановлення ступеня тісноти зв'язку між показником і факторами у багатфакторних залежностях із використанням можливостей надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер, із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel, та під'єднанням до мережі Internet

Короткий теоретичний коментар

В навколишньому середовищі все перебуває в постійній залежності. На розвиток явищ і процесів впливає ціла низка факторів різного походження із різною інтенсивністю впливів.

Рівняння регресії – це аналітичне рівняння, за допомогою якого можна виразити взаємозв'язок між ознаками. Тобто це регресійна модель або економіко-математична модель залежності результативної ознаки від факторної (факторних).

Залежність результуючого показника від значення одного фактора виражається залежністю виду

$$y = a + bx \quad (8.1)$$

У багатьох випадках при дослідженні становища системи на результативну ознаку впливає не один, а кілька факторів. Між факторами існують складні взаємозв'язки, тому їхній вплив на результативну ознаку є комплексним, а не просто сумою ізольованих впливів.

Багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз дає змогу оцінити міру впливу на досліджуваний результативний показник кожного із введених у модель факторів при фіксованому положенні на середньому рівні інших факторів.

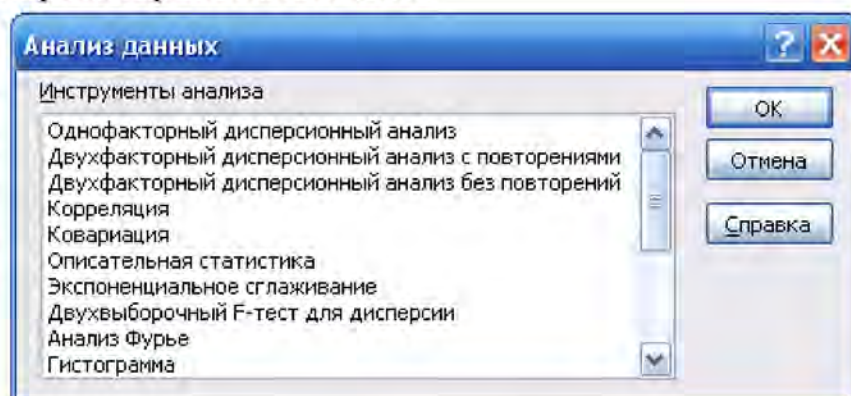
З практичного досвіду відомо, що залежності такого виду можуть бути описані багатофакторною лінійною виробничою функцією типу:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \quad (8.2)$$

Основна задача багатофакторної виробничої регресії – це дослідження впливу основних факторів на результат діяльності системи.

Для розв'язання такого класу задач і проведення розрахунків широкі можливості надає табличний процесор Microsoft Excel

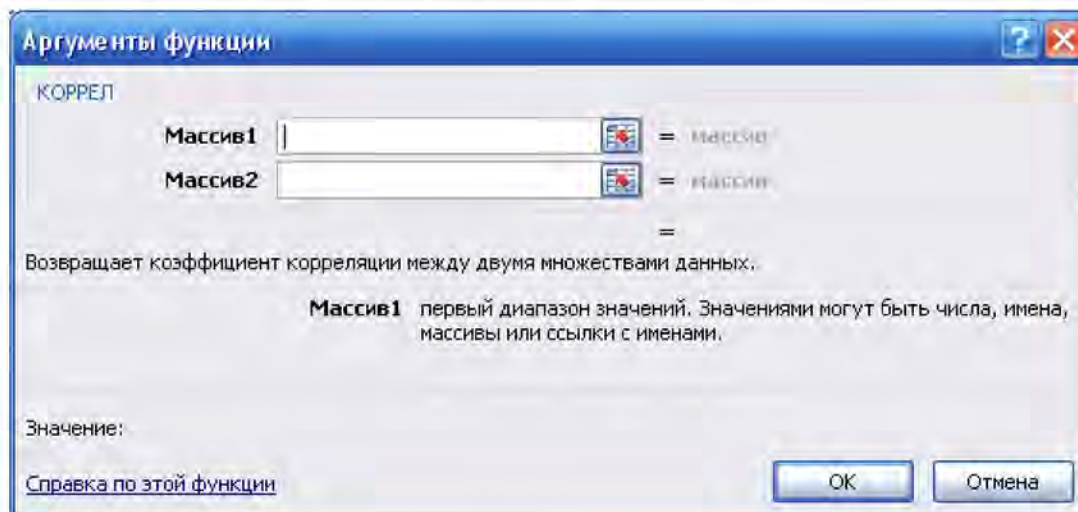
Excel має надбудову Пакет аналізу, що дозволяє проводити різні типи статистичних аналізів і на їх основі складати прогнози.



Порядок і методика виконання завдань

1. *Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності. Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції.*

Для встановлення ступеня тісноти зв'язку між фактором і показником обчислюють значення коефіцієнта кореляції, використовуючи вбудовану статистичну функції =КОРРЕЛ().



Аргументи функції КОРРЕЛ:

Массив1 – стовпець статистичних даних показника Y;

Массив2 – стовпець статистичних даних фактора X.

Для обчислення параметрів лінійної залежності можна використати вбудовану статистичну функцію =ЛИНЕЙН(). Перш ніж скористатися даною функцією, попередньо необхідно виділити діапазон для занесення результату обчислень (довільний діапазон десятих чарунок із п'яти рядків і двох стовпчиків).

Аргументи функції ЛИНЕЙН:

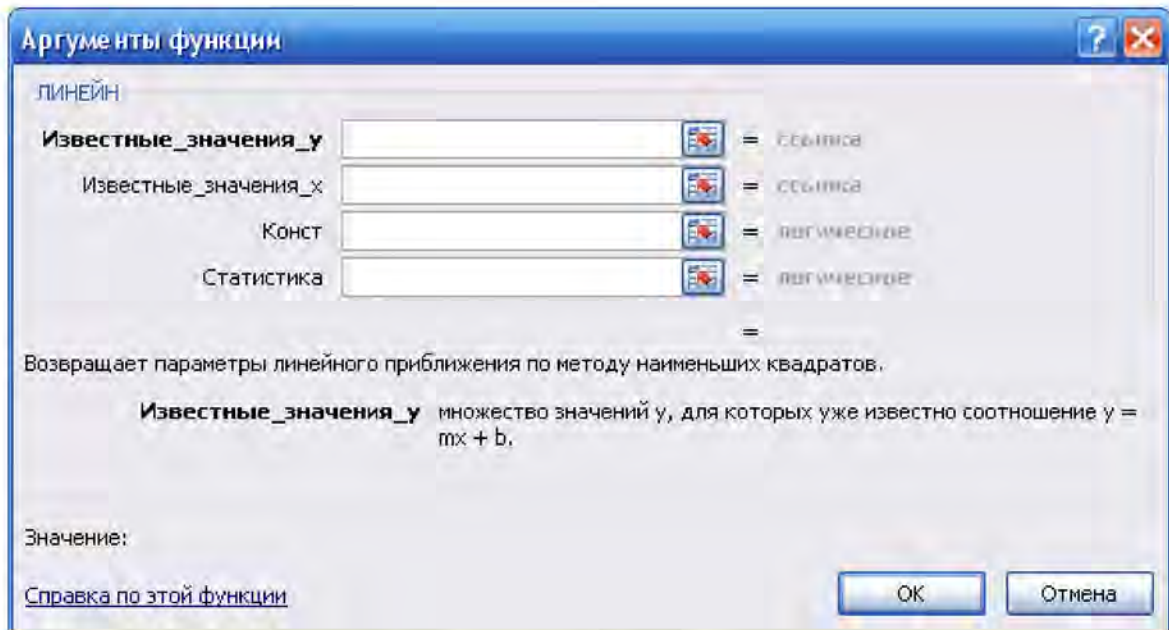
Известные_значения_y – блок відомих значень показника Y;

Известные_значения_x – блок відомих значень фактора X;

Конст – визначає наявність вільного члена у рівнянні регресії (1);

Статистика – задає обчислення додаткових статистичних показників (1);

Після введення аргументів функції ініціалізація обчислень починається натисканням комбінації клавіш <Ctrl><Shift>+<Enter>.



Результати розрахунку за даною функцією:

i	1	0	
a_i			
$Se\ a_i$			
$R^2=$			$=Se\ y$
$F_{розр}=$			$=Df$
$SSR=$			$=SSE$

Для визначення адекватності побудованої моделі слід обчислити табличне (критичне) значення критерію Фішера, використовуючи вбудовану статистичну функцію =FРАСПОБР() (у новіших версіях =F.ОБР()).

Аргументи функції FРАСПОБР (у новіших версіях F.ОБР):

Вероятность – рівень ймовірності випадкового одержання високого значення R^2 (0,05);

Степени_свободы1 – кількість незалежних змінних (факторів) у рівнянні регресії (для парної лінійної регресії –1);

Степени_свободы2 – кількість ступенів вільності (n-m-1) розраховане як кількість спостережень – кількість незалежних змінних – 1;

Надалі $F_{розр}$ порівнюють із $F_{кр}$ і приймають рішення щодо адекватності моделі: якщо $F_{розр} > F_{кр}$ – з надійністю $P=0,95$ економетричну модель можна вважати адекватною вихідним даним і на її підставі можна проводити прогнозування зміни досліджуваного показника в залежності від зміни фактора.

Для визначення істотності коефіцієнта кореляції обчислюють табличне значення t-статистики, використовуючи вбудовану статистичну функцію =СТЮДРАСПОБР() (у новіших версіях =СТЮДЕНТ.ОБР())

Аргументи функції СТЮДРАСПОБР (у новіших версіях СТЮДЕНТ.ОБР):

Вероятность – рівень ймовірності випадкового одержання високого значення R^2 (0,05);

Степени_свободы – кількість ступенів вільності (n-m-1) розраховане як кількість спостережень – кількість незалежних змінних – 1;

Розрахункові значення критерію Стюдента для кожного з параметрів

обчислюють за формулою $t_{\delta_{i\varphi\delta}} = \frac{\hat{a}_s}{Se\hat{a}_s}$.

Розрахункове значення t-статистики визначається за формулою

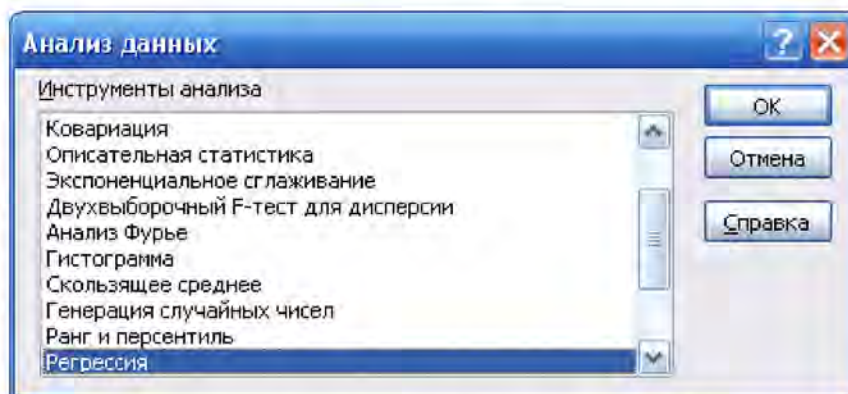
$$t_{\delta_{i\varphi\delta}} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \text{ де } r - \text{коефіцієнт кореляції, и}$$

Надалі отримане розрахункове значення t-статистики порівнюють із $t_{кр}$ і приймають остаточне рішення щодо істотності коефіцієнта кореляції (якщо $t_{розр} > t_{кр}$, з надійністю $P=0,95$ можна зробити висновок про значимість коефіцієнта кореляції).

2. Оцінка параметрів лінійної залежності із використанням надбудови Пакет анализа у Microsoft Excel.

Табличний процесор Microsoft Excel має надбудову **Пакет анализа**, що дозволяє використовувати низку інструментів аналізу статистичних даних. Зокрема, розрахувати параметри лінійної залежності дозволяє інструмент аналізу **Регресія**.

У результаті аналізу будуть автоматично розраховані та виведені значення регресійної статистики (значення коефіцієнта кореляції R , стандартна похибка, кількість спостережень



тощо); показники дисперсійного аналізу (F критерій Фішера, коефіцієнти у формулі парної лінійної регресії, t -статистика і т.д.)

Для обчислення параметрів парної лінійної регресії необхідно:

- пересвідчитися, чи увімкнена надбудова **Пакет анализа** (чи доступна на стрічці **Данные** кнопка **Анализ данных**). За відсутності такої увімкнути потрібну надбудову за командою **Файл** $\Rightarrow$ **Параметры** $\Rightarrow$ **Надстройки** $\Rightarrow$ **Перейти** ☒ **Пакет анализа**;
- виконати команду **Анализ данных** $\Rightarrow$ **Регрессия** стрічки **Данные** (**Сервис** $\Rightarrow$ **Анализ данных** $\Rightarrow$ **Регрессия**) і натиснути **ОК**;
- в активному вікні **Регрессия**, що з'явиться на екрані, задати всі необхідні опції: вказати діапазон вхідних значень показника Y , діапазон вхідних значень фактора X , обрати для виведення результату новий робочий аркуш і натиснути **ОК**;
- проаналізувати отриманий результат.

3. Встановлення ступеня тісноти зв'язку між показником і факторами у багатофакторних залежностях із використанням можливостей надбудови Пакет анализа у Microsoft Excel.

Серед можливостей Пакета анализа табличного процесора Microsoft Excel є інструмент **Корреляция**, що дозволяє обчислити тісноту зв'язку між показником і фактором.

Щоб обчислити означені показники, слід виконати команду **Анализ данных** ⇒ **Корреляция** стрічки **Данные** (**Сервис** ⇒ **Анализ данных** ⇒ **Корреляция** в більш ранніх версіях), у вікні Корреляция, що з'явиться на екрані, задати вхідний діапазон значень результуючого показника і факторів, обрати новий аркуш для результату і натиснути OK. Проаналізувати результат.

4. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створені файли.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Вправа 1. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності. Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції

Задача:

Дослідити вплив забруднення атмосферного повітря на стан здоров'я населення (наприклад, вплив викидів оксиду сірки в атмосферу на кількість новоутворень по Україні).

Скласти прогнози зміни кількості захворювань раком.

1. Користуючись довільною програмою-браузером, відкрити сайт Державної служби статистики України
<http://www.ukrstat.gov.ua>
2. Відшукати статистичну інформацію *Про навколишнє середовище*.
3. Відкрити сторінку про *Основні показники забруднення атмосферного повітря* та ознайомитися із наведеною інформацією.
4. Завантажити табличний процесор Microsoft Excel.
5. Скопіювати таблицю про *викиди сірки в атмосферу* на *Лист 1* нової книги. *Лист1* перейменувати на *Вихідні дані*
6. Відшукати статистичну інформацію *Про здоров'я населення України*.
7. Скопіювати таблицю про *рівень захворюваності населення* на *Лист 2* активної книги.
8. Знайти показники щодо кількості первинних звернень з приводу новоутворень.

9. Скопіювати статистичні показники щодо кількості новоутворень на аркуш *Вихідні дані*, виконавши при необхідності транспонування матриці.
10. Зберегти книгу з іменем *Парна лінійна регресія*.

Встановлення ступеня тісноти зв'язку між фактором і показником

1. Активізувати аркуш *Вихідні дані*.
2. Відформатувати таблицю за наведеним зразком.
3. Встановити курсор у чарунку C23.

Microsoft Excel - лаб2

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервіс Данні Окно Справка

Введіть вміст

Verdana 11 Ж К Ч

А1 Залежність кількості новоутворень від викидів сірки в атмосферу

Залежність кількості новоутворень від викидів сірки в атмосферу			залежність від фактора X			залежність від часу (i)		
i	Yi	Xi	i	1	0	i	1	0
1	382	984,8	ai=	0,082497	308,6737035	ai=	3,747253	380,1099
2	394	992,1	Se ai=	0,016101	19,60680723	Se ai=	0,4455	3,793297
3	382	1032,6	R2=	0,68628	9,883354336	R2=	0,854986	6,719525
4	395	1046,3	Fрозр=	26,25072	12	Fрозр=	70,75062	12
5	406	988,5	SSR=	2564,189	1172,168315	SSR=	3194,533	541,8242
6	408	1132,8						
7	414	1347,2	y=	0,082x+308,67		y=	3,74x+380,109	
8	407	1342,6						
9	406	1320,6	F табл=	17,71775				
10	407	1262,7	t=					
11	418	1235,2	t(0,95;12)=					
12	423	1363,4						
13	433	1430,3						
14	440	1413,3						
15								
16								
17								
18								
19	Xi - викид діоксид сірки							
20	Yi - новоутворень							
21								
22								
23	Kорр=	г _{ух} =	0,82842045					

Статистика Вихідні дані Тренд Регресія всього захв аномалії дихання Лист

Действия Автофигуры

Готово NUM

4. Ввести формулу `=КОРРЕЛ(B4:B17;C4:C17)`, використавши вбудовану функцію Excel.
5. Зробити висновок про ступінь тісноти зв'язку та зберегти файл *Парна лінійна регресія*.

Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності

1. На аркуші *Вихідні дані*, підготувати діапазон E2: H8 для обчислення параметрів лінійної залежності – виконати форматування цих чарунок за зразком.
2. Виділити діапазон F4:G8.
3. Вставити функцію =ЛИНЕЙН(B4:B17;C4:C17;1;1) і натиснути <Ctrl><Shift>+<Enter>.
4. Проаналізувати отримані параметри.
5. За аналогією із використанням функції = ЛИНЕЙН обчислити параметри лінійної залежності кількості новоутворень від фактора часу у діапазоні K4:L8.
6. На окремому аркуші побудувати графік, що відображає кількість новоутворень від фактора часу. Додати лінію тренду (вивести графік лінійної функції, рівняння прямої та коефіцієнт детермінації). Порівняти отримані результати із результатами, отриманими з використанням функції = ЛИНЕЙН
7. Зробити висновок про ступінь тісноти зв'язку та зберегти файл *Парна лінійна регресія*.

Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції

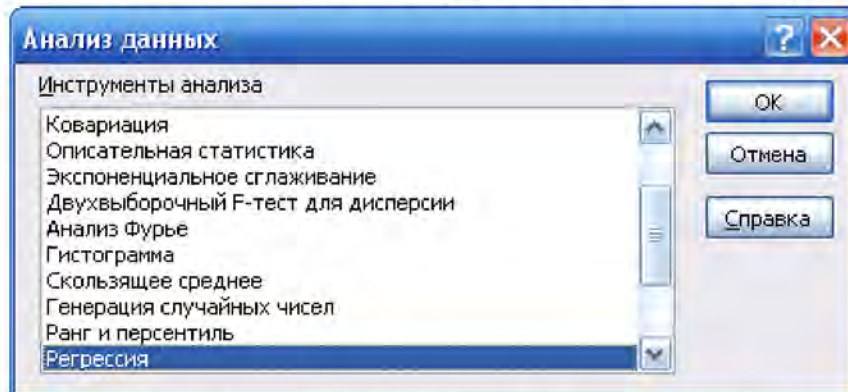
1. На аркуші *Вихідні дані*, підготувати діапазон E12: G14 для визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції.
2. Встановити курсор у чарунку F12 і ввести функцію =ФРАСПОБР(0,05;1;12)
3. У чарунку =F13 ввести формулу =F4/F5, а в чарунку G13 формулу =G4/G5
4. У чарунку F14 вставити функцію =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;12)
5. Зробити висновок про адекватність побудованої моделі та істотність коефіцієнта кореляції за значенням критерію Фішера і критерію Стюдента.

Вправа 2. Оцінка параметрів лінійної залежності із використанням надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel

1. У табличному процесорі Excel перевірити, чи увімкнена надбудова *Пакет аналіза* (пересвідчитися, чи доступна команда **Анализ данных**

стрічки **Данные** або команда **Сервис** ⇒ **Анализ данных** в більш ранніх версіях).

2. За відсутності вищезгаданої команди, увімкнути надбудову **Пакет анализа** (**Файл** ⇒ **Параметры** ⇒ **Надстройки** ⇒ **Перейти** ☒ **Пакет анализа** або команду **Сервис** ⇒ **Надстройки** ⇒ **Пакет анализа** у більш ранніх версіях).
3. Виконати команду **Анализ данных** ⇒ **Регрессия** стрічки **Данные** (**Сервис** ⇒ **Анализ данных** ⇒ **Регрессия**) і натиснути **OK**.



4. В активному вікні **Регрессия**, що з'явиться на екрані, задати всі необхідні опції.
5. Утвореному аркушу із результатами регресійного аналізу надати назву **Регресія**.
6. Проаналізувати результат, зробити висновки.

Microsoft Excel - лаб2

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Calibri 11 Ж К Ч

F12 0,000251773788189429

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	Регрессионная статистика								
4	Множественный R	0,828420449							
5	R-квадрат	0,686280441							
6	Нормированный R-квадрат	0,660137144							
7	Стандартная ошибка	9,883354336							
8	Наблюдения	14							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		df	SS	MS	F	Значимость F			
12	Регрессия	1	2564,188828	2564,188828	26,25072315	0,000251774			
13	Остаток	12	1172,168315	97,68069294					
14	Итого	13	3736,357143						
15									
16		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95%	Верхние 95%
17	Y-пересечение	308,6737035	19,60680723	15,74319061	2,23285E-09	265,9541403	351,3933	265,9541	351,3933
18	Переменная X 1	0,082496753	0,016101496	5,123545955	0,000251774	0,047414608	0,117579	0,047415	0,117579
19									
20									
21									
22									
23									

Статистика / Вихідні дані / Тренд / Регресія / всього захо / аномалії / діагностика / Лист7 / Лист

Действия Автофигуры

Готово NUM

7. Зберегти документ *Парна лінійна регресія.xlsx* і закрити його.

Вправа 3. Встановлення ступеня тісноти зв'язку між показником і факторами у багатофакторних залежностях із використанням можливостей надбудови *Пакет аналіза* у *Microsoft Excel*

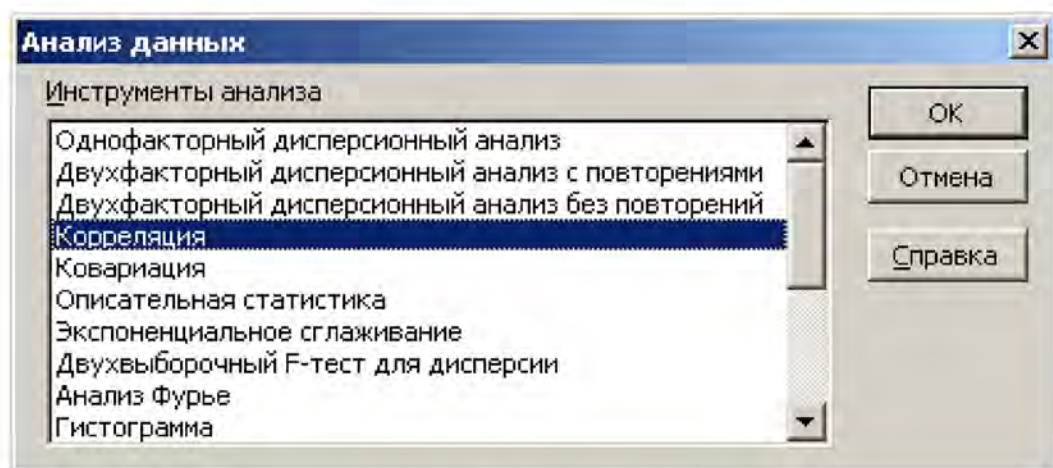
Завдання 3:

Дослідити вплив на вагу бульби площі листової поверхні та кількості пагонів.

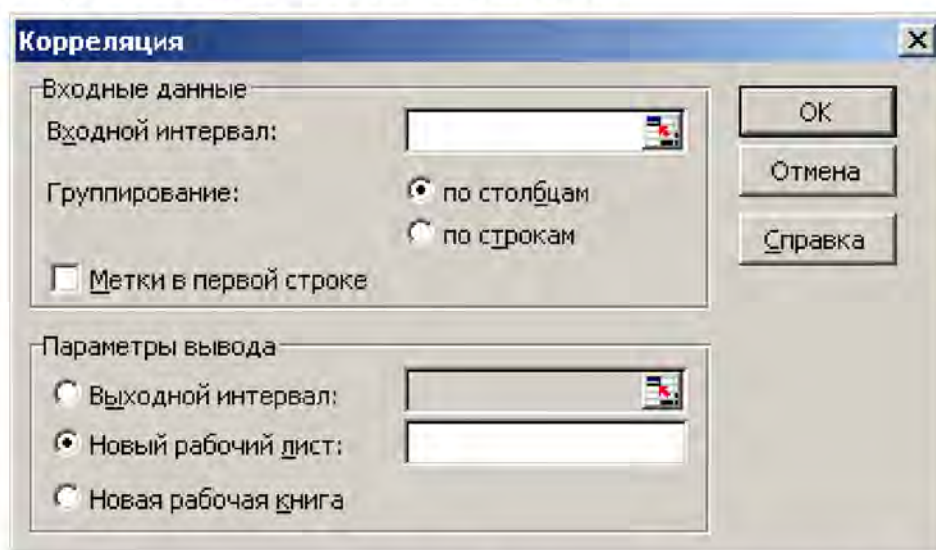
1. Створити новий документ у табличному процесорі Microsoft Excel.
2. Ввести у чарунки Excel на *Лист 1* нової книги вихідні дані до задачі.
3. Перейменувати *Лист 1* на *Вихідні дані*
4. Відформатувати створену таблицю на власний розсуд.
5. Зберегти книгу з іменем *Кореляція*.

	А	В	С	Д
1	листова поверхня	кількість пагонів	вага бульби	
2	199,5	1	209,7	
3	1987,7	6	184,4	
4	3971,9	8	409,8	
5	4175	3	385,2	
6	6216,2	4	463,8	
7	3141,9	4	199,3	
8	4784,2	6	311,5	
9	4752,1	6	341,2	
10	3597,9	4	238,6	
11	1168,4	4	193,5	
12				
13				

6. Виконати команду **Анализ данных** ⇒ **Корреляция** стрічки **Данные** (**Сервис** ⇒ **Анализ данных** ⇒ **Корреляция**).



7. В активному вікні задати всі необхідні опції.



8. Проаналізувати результат, зробити висновки про тісноту зв'язку між результативною та факторними ознаками.

	А	В	С	Д	Е
1		<i>листова поверхня</i>	<i>кількість погонів</i>	<i>вага бульби</i>	
2	листова поверхня	1			
3	кількість погонів	0,429018678	1		
4	вага бульби	0,812626396	0,298020936	1	
5					

Кореляція / Лист1 / Лист2 / Лист3 /

9. Зберегти документ *Кореляція* і завершити роботу з табличним процесором.
10. Виконану роботу продемонструвати викладачу та в позааудиторний час оформити звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері результуючі документи, що отриманий після виконання завдань (аркуш *Вихідні дані* та аркуш *Регресія* файлу *Парна лінійна регресія.xlsx*, аркуш *Вихідні дані* та аркуш *Кореляція* файлу *Парна лінійна регресія.xlsx* Вашої папки диску D:\).

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Що називають рівнянням регресії?
2. Що називають парною лінійною регресією?
3. Формула парної лінійної регресії.
4. Формула багатфакторної лінійної регресії.
5. Розкрийте поняття та призначення лінії тренда.
6. Навіщо розраховувати параметри парної лінійної регресії?
7. Які вбудовані функції Excel дозволяють оцінити адекватність моделі?
8. Як обчислюється тіснота зв'язку між показниками в Excel?
9. Можливості Пакета аналізу Microsoft Excel
10. Розкрити технологію роботи з Пакетом аналізу табличного процесора Microsoft Excel.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.

2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основи математичного моделювання в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечський, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
6. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 5. МОДЕЛЮВАННЯ ОСНОВНИХ ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ФУНКЦІОНУВАННЯ ВОДНИХ ЕКОСИСТЕМ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

Тема: Розрахунки концентрації забруднюючих речовин в басейні стічних вод

Мета: Ознайомитися з елементами математичного моделювання основних гідроекологічних процесів і функціонування водних екосистем

Завдання:

1. Ознайомитися з основними підходами щодо математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів.
2. Виконати числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

В екології постають задачі моделювання гідроекологічних процесів і функціонування водних екосистем; моделювання і прогнозування забруднення атмосфери, забруднення ґрунтового та рослинного середовища; моделювання чисельності популяцій тощо. При моделюванні більшості екологічних процесів застосовуються диференціальні рівняння.

Для ефективного математичного моделювання та прогнозування гідрохімічного й водного режимів різних водних об'єктів, як річок, так і водосховищ, використовується модель, основою якої є формула визначення концентрації забруднення для неконсервативної речовини, записана в такому вигляді:

$$c^y(t) = c_{\beta}^* + (c_0^y - c_{\beta}^*) \exp \left(- \frac{1 + \beta^y \tau_0^i}{\tau_0^i} t \right), \quad (9.1)$$

де

$$c_{\beta}^* = \frac{q^{i-1} c^{i-1,j} + q_{\phi}^i c_{\phi}^{ij} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i c_k^{ij} + q_{on}^i c_{on}^{ij} + m_{\partial n}^{ij}}{(1 + \beta^{ij} \tau_0^i) \left(q^{i-1} + q_{\phi}^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{on}^i - q_{вип}^i \right)}, \quad (9.2)$$

$$\tau_0^i = \frac{W_0^i}{q^{i-1} + q_{\phi}^i + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i + q_{on}^i - q_{вип}^i}, \quad \beta^{ij} = a^{ij} + \lambda^j \quad (9.3)$$

Порядок і методика виконання завдань

1. Ознайомитися з основними підходами щодо математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів. Виконати числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.

Балансові рівняння та імітаційна математична модель широко застосовується на практиці, зокрема, для розрахунку концентрації речовини, що забруднює водний об'єкт протягом такого відрізка часу, за який зовнішні значення витрат води, концентрацій та інших допоміжних величин можна вважати сталими.

Такі обчислення можна виконати стосовно басейну стічних вод об'ємом $W_0=Q$ (м³), до якого надходять стоки з витратою q_1 (м³/доба) і концентрацією в них солей c_1 (г/м³). Виникає задача визначення динаміки концентрації $c_0(t)$ солей в басейні, якщо початкова концентрація солей в басейні була c_0 , а рівень води в ньому не змінюється ($q_1=q_2$). Для розрахунку можна скористатися формулою (9.1), яку записують у такому вигляді

$$c_0(t) = c_1 + (c_0 - c_1) \exp \left(-\frac{t}{\tau_0} \right), \quad \tau_0 = \frac{Q_0}{q_1} \quad (9.4)$$

Її можна переписати так:

$$c_0^*(t) = c_1^* + (1 - c_1^*) \exp \left(-\frac{t}{\tau_0} \right), \quad \text{де} \quad (9.5)$$

$$c_0^* = \frac{c_0}{c_0}, \quad c_1^* = \frac{c_1}{c_0} = k \quad \text{— безрозмірні (зведені) величини, що}$$

визначають концентрацію солей у басейні і в стічних водах через початкову концентрацію c_0 .

$\tau_0 = \frac{Q_0}{q_1}$ – час повного оновлення води в басейні, що характеризує водообмін за умови не перемішування води в басейні.

Величину $k = \frac{c_1}{c_0}$ називають коефіцієнтом (кратністю) розбавлення або змішування.

При побудові графіка зміни концентрації солей в басейні стічних вод враховують наступне:

- при $t \rightarrow \infty$ функція прямує до сталої величини $c_1^* = k \cdot c_0^* (t) \rightarrow k$, графік має асимптоту $c_0^* = c_1^* = k$;
- при $k = c_1^* > 1$ ($c_1 > c_0$) функція c_0^* зростає $\frac{dc_0^*}{dt} > 0$ і опукла вгору $\frac{d^2 c_0^*}{dt^2} < 0$;
- при $k = c_1^* < 1$ ($c_1 < c_0$) функція c_0^* спадає $\frac{dc_0^*}{dt} < 0$ і стає вогнутою (опуклою вниз) $\frac{d^2 c_0^*}{dt^2} > 0$.

Для побудови графіка знаходять координати деяких найхарактерніших для графіка точок кривої.

2. Виконати числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.

Для виконання числових розрахунків концентрації речовини-забруднювача можна скористатися спеціальними пакетами математичних програм Maple, MathCad, Mathlab, Mathematica, он-лайн калькуляторами або ж провести обчислення в табличному процесорі Microsoft Excel за формулами (9.1)-(9.5).

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

1. В рамках ознайомлення з основами математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів, виконайте числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.

Приклад 1

Визначити динаміку концентрації солей $c_{\sigma}(t)$ в басейні стічних вод об'ємом $W_0=Q_0$ (м³), до якого надходять стоки з витратою q_1 (м³/добу) і концентрацією в них солей c_1 (г/м³), якщо початкова концентрація солей в басейні була c_0 (г/м³), а рівень води в ньому не змінюється (швидкість надходження в басейн рівна швидкості витікання стоків із басейну).

Знайти числові значення концентрацій у кількох моментах часу t для різних коефіцієнтів змішування k ($k = 10$ і $k=0,1$) і для трьох різних значень періодів τ_0 повного оновлення (заміщення) басейну стічними водами (для $\tau_0=2,5$ доби, $\tau_0=5$ діб, $\tau_0=10$ діб).

2. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel для розв'язання задачі моделювання гідрохімічного режиму при забрудненні/очищенні води у водному басейні.
3. Надайте аркушу *Лист 1* назву *Розрахунки концентрації_1*, де буде досліджуватися динаміка концентрацій забруднення при коефіцієнті змішування більшому за 1 ($k = 10$).
4. На аркушу *Розрахунки концентрації_1* в окремі чарунки Excel введіть вихідні дані до *прикладу 1* та створіть за зразком таблицю для розрахунків гідрохімічного режиму при ЗАБРУДНЕННІ води в басейні.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Розрахунки концентрації речовини-забруднювача															
2																	
3	Коефіцієнт змішування $k=c_1/c_0=$	$c^*_0=$	10														
4		$\tau_0=$	2,5	діб													
5	Час повного оновлення води в басейні	$\tau_0=$	5	діб													
6		$\tau_0=$	10	діб													
7																	
8		Розрахунки гідрохімічного режиму при ЗАБРУДНЕННІ води в басейні															
9	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	$k=10, \tau_0=2,5$																
11	$k=10, \tau_0=5$																
12	$k=10, \tau_0=10$																
13																	

5. У чарунку **B10** уведіть формулу (5.5) для розрахунку концентрації солей $c^*_\sigma(t)$ в басейні для значення $k = 10$, $\tau_0=2,5$ в період часу $t=0$.

$$= \$C\$3 + (1 - \$C\$3) * \text{EXP}(-B\$9/\$C4)$$

Надалі введену формулу слід буде скопіювати для інших часових значень t , k , τ_0 , тому у формулі необхідно задати абсолютні посилання на певні чарунки (стовпчики, рядки).

6. Розрахуйте концентрації солей $c^*_o(t)$ в басейні для значення:

$k = 10$, $\tau_0 = 2,5$ в період часу $t = 1 \dots 15$;

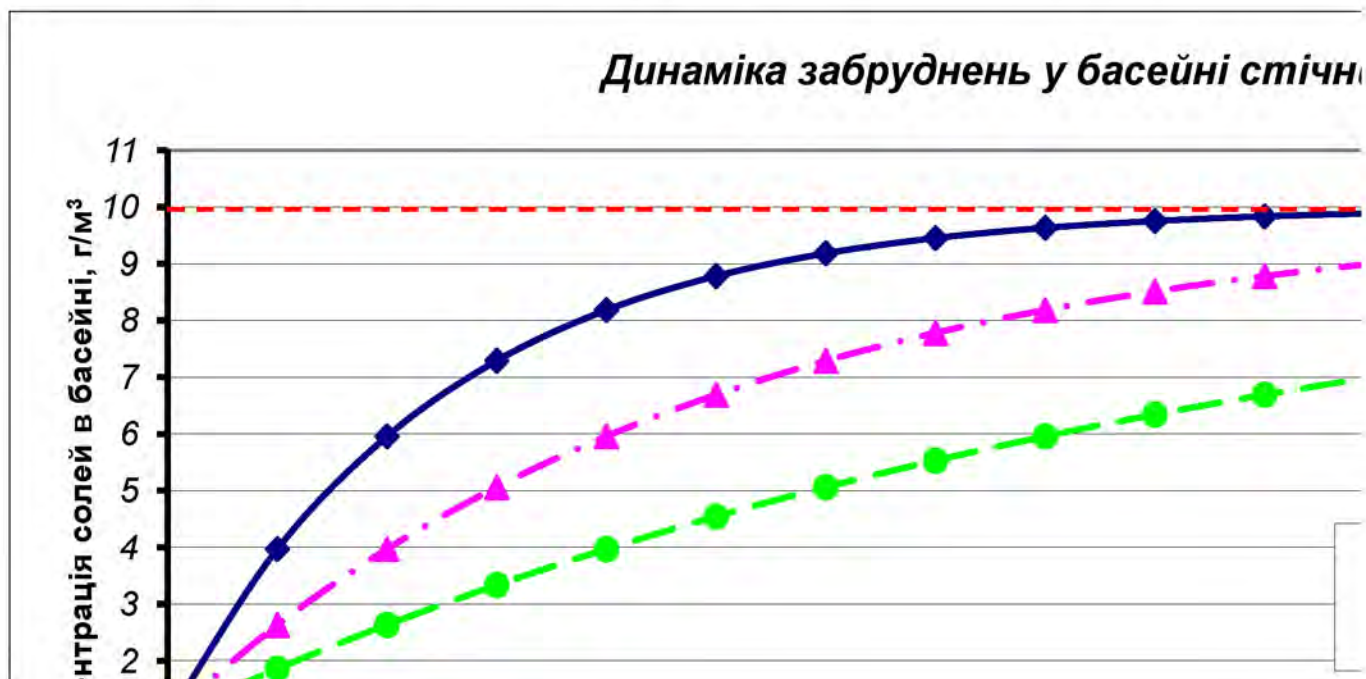
$k = 10$, $\tau_0 = 5$ в період часу $t = 0 \dots 15$;

$k = 10$, $\tau_0 = 10$ в період часу $t = 0 \dots 15$.

Для цього скопіюйте формулу з чарунки **B10** для діапазону **B11:Q10**, використовуючи маркер авто заповнення, а далі і для діапазону **B11:Q12**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Розрахунки концентрації речовини-забруднювача															
2																	
3	Коефіцієнт змішування $k=c1/c0=$	$c^*_o =$	10														
4		$\tau_0 =$	2,5	дів													
5	Час повного оновлення води в басейні	$\tau_0 =$	5	дів													
6		$\tau_0 =$	10	дів													
7																	
8		Розрахунки гідрохімічного режиму при ЗАБРУДНЕННІ води в басейні															
9	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	$k=10, \tau_0=2,5$	1	3,967	5,956	7,289	8,183	8,782	9,184	9,453	9,633	9,754	9,835	9,89	9,926	9,95	9,967	9,978
11	$k=10, \tau_0=5$	1	2,631	3,967	5,061	5,956	6,689	7,289	7,781	8,183	8,512	8,782	9,003	9,184	9,332	9,453	9,552
12	$k=10, \tau_0=10$	1	1,856	2,631	3,333	3,967	4,541	5,061	5,531	5,956	6,341	6,689	7,004	7,289	7,547	7,781	7,992

7. За результатами обчислення на активному аркуші побудуйте графіки зміни концентрації забруднень у водному басейні з часом (динаміку забруднень стічних вод) для трьох випадків $\tau_0=2,5$, $\tau_0=5$, $\tau_0=10$ та відформатуйте їх за наведеним зразком.



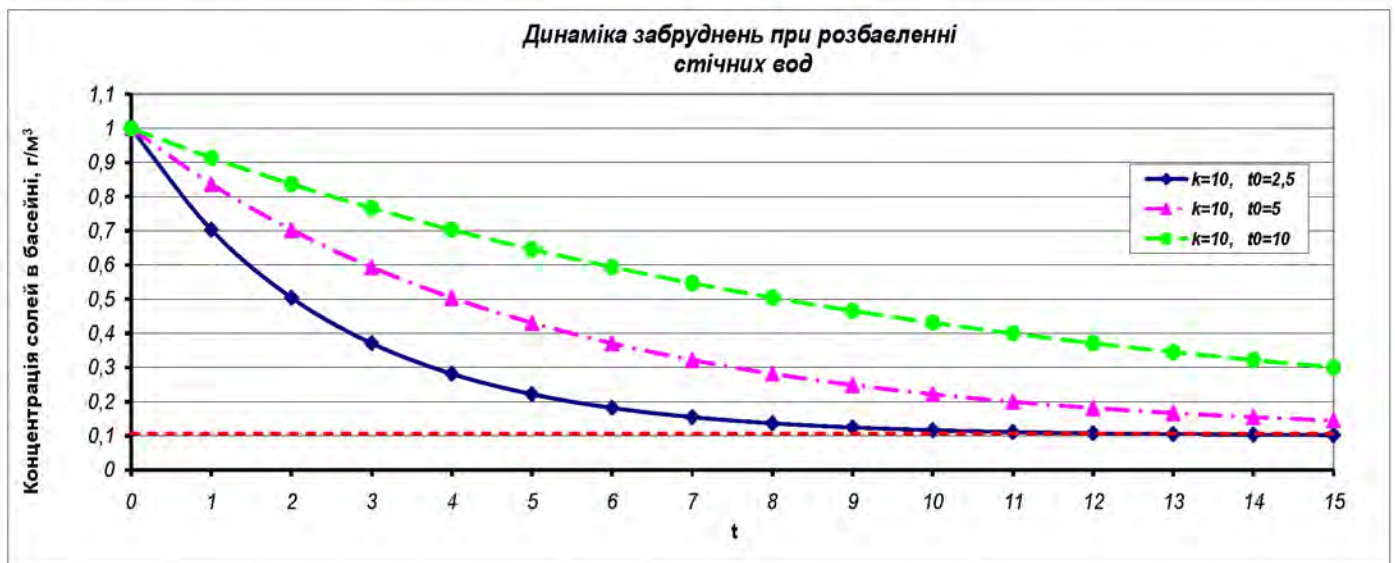
8. Зробіть копію аркуша *Розрахунки концентрації_1*, якій надайте назву *Розрахунки концентрації_2*.

9. На аркуші *Розрахунки концентрації_2* розв'яжіть **приклад 1** для випадку РОЗБАВЛЕННЯ стоків, що містяться у басейні стічних вод, коли параметр $k = c^*_{\theta}$ буде меншим за одиницю $0 < k < 1$.

У чарунку **С3** введіть значення $k=0,1$, змініть назву вихідної таблиці та відредагуйте діаграму.

Проаналізуйте отриманий результат і **запишіть висновок** у будь-яку чарунку Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Розрахунки концентрації речовини-забруднювача																
2																	
3	Коефіцієнт змішування $k=c1/c0=$	$c^*_0=$	0,1														
4		$\tau_0=$	2,5	дів													
5	Час повного оновлення води в басейні	$\tau_0=$	5	дів													
6		$\tau_0=$	10	дів													
7																	
8	Розрахунки гідрохімічного режиму при ОЧИЩЕННІ води в басейні																
9	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	$k=10, \tau_0=2,5$	1	0,703	0,504	0,371	0,282	0,222	0,182	0,155	0,137	0,125	0,116	0,111	0,107	0,105	0,103	0,102
11	$k=10, \tau_0=5$	1	0,837	0,703	0,594	0,504	0,431	0,371	0,322	0,282	0,249	0,222	0,2	0,182	0,167	0,155	0,145
12	$k=10, \tau_0=10$	1	0,914	0,837	0,767	0,703	0,646	0,594	0,547	0,504	0,466	0,431	0,4	0,371	0,345	0,322	0,301



Отже, при відомих початкових умовах за допомогою графіків легко визначити значення концентрації забруднення в басейні c^*_t у будь-який момент часу t , а також час, протягом якого концентрація забруднень в басейні досягне заданого значення, наприклад гранично допустимої концентрації (ГДК) $c_{ГДК}$. Після досягнення такої концентрації необхідно подачу стічних вод припинити і відновити її тільки після певного проміжку часу, протягом якого в басейні внаслідок процесів самоочищення концентрація забруднень знизиться до величини c_0 .

10. Збережіть файл із іменем *laboratorna_9.xlsx* у Вашій папці диску D:.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, відповіді на контрольні запитання та роздрукований на принтері результуючий документ *laboratorna_9.xlsx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Назвіть фактори впливу на стан водних об'єктів
2. Чи враховується фактор часу при моделюванні зміни концентрації забруднюючих речовин у водних басейнах?
3. Наведіть визначення динамічних моделей.
4. Який математичний апарат використовується для розв'язання задач, що враховують фактор часу?
5. За якою формулою обчислюється концентрація солей в басейні, якщо рівень води в ньому не змінюється.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в экологии: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.

6. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. [Навч. посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
7. Яскевець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Яскевець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10

Тема: Обчислення концентрації та дослідження динаміки БПК та РК

Мета: Ознайомитися з математичними динаміки органічної речовини та розчиненого кисню в басейні самоочищення

Завдання:

1. З'ясувати алгоритм математичної моделі динаміки органічної речовини та розчиненого кисню в басейні самоочищення.
2. Розв'язати тестовий приклад обчислення концентрації та дослідження динаміки БПК та РК.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

Математичне та імітаційне моделювання ефективні при дослідженні та прогнозуванні стану водних екосистем та якості води в умовах антропогенного впливу. Так, концентрація у воді розчиненого кисню (РК) є одним із основних інтегральних показників, що характеризують якість поверхневих вод як одного із найцінніших природних ресурсів. Оскільки між кількістю (концентрацією) у воді розчиненого кисню і наявністю органічної речовини існує тісний зв'язок, важливе значення при дослідженні гідробіологічних і гідрохімічних процесів набуває використання математичних моделей РК і БПК.

Класичними результатами у сфері математичного моделювання кисневого режиму і динаміки органічної речовини у воді є дослідження Стрітера і Фелпса. Запропоновані ними математичні моделі описують кінетику трансформації у воді легко окислювальної органічної речовини і динаміку розчиненого у воді кисню без урахування процесів розбавлення і водообміну:

$$\frac{d\tilde{N}_{AIE}}{dt} = -k_1 \tilde{N}_{AIE}$$

$$\frac{d\tilde{N}_{PE}}{dt} = k_2 (\tilde{N}_{PE}^* - \tilde{N}_{PE}) - k_1 C_{AIE}$$

Однак і в межах точкової моделі можна врахувати процеси розбавлення, якщо вважати, що воно відбувається за рахунок миттєвих процесів турбулентного перемішування води в басейні певного об'єму W . Моделі з урахуванням миттєвого перемішування розглянуті при описуванні гідрохімічного режиму.

Математичні моделі динаміки органічної речовини і розчиненого у воді кисню з урахуванням процесів розбавлення і водообміну записують у вигляді диференціальних рівнянь відносно мас цих речовин.

Порядок і методика виконання завдань

1. З'ясувати алгоритм математичної моделі динаміки органічної речовини та розчиненого кисню в басейні самоочищення.

Концентрації органічних речовин (БПК – біологічна потреба кисню), що легко окислюються (розкладаються мікроорганізмами) $C_{\text{БПК}}(t)$ і концентрації розчиненого кисню у воді $C_{\text{РК}}(t)$ в басейні самоочищення (в озері, ставку або в водосховищі) визначають за допомогою формул (10.1) – (10.5).

$$C_{\text{БПК}}(t) = \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} + [C_{\text{БПК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}] \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right) \quad (10.1)$$

де рівноважна (середня зважена) концентрація органічних речовин у воді визначається рівностями

$$\bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} = \frac{\bar{C}_{\text{БПК}}}{1 + \alpha\tau}, \quad \bar{C}_{\text{БПК}} = \frac{Q}{q}, \quad Q = \sum_{i=1}^n C_{\text{БПК}}^i q_i, \quad q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (10.2)$$

а прискорений період водообміну визначається рівністю

$$\tau_{\alpha} = \frac{\tau}{1 + \alpha\tau}, \quad \tau = \frac{W}{q}. \quad (10.3)$$

У випадку консервативних (біологічно жорстких) органічних речовин у формулах (10.1)–(10.3) потрібно покласти $\alpha=0$

$$C_{\text{РК}}(t) = C_{\text{РК}}^{\text{CT}} + \left[C_{\text{РК}}^{(0)} - C_{\text{РК}}^{\text{CT}} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (C_{\text{БПК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}) \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\beta}}\right) + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (C_{\text{БПК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right),$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\tau}{1 + \alpha\tau}, \quad \tau_{\beta} = \frac{\tau}{1 + \beta\tau}, \quad (10.4)$$

$$C_{PK}^{CT} = \overline{C}_{PK}^{\beta} + \frac{\beta\tau}{1 + \beta\tau} C_{PK}^{*} - \frac{\alpha\tau}{1 + \alpha\tau} \overline{C}_{BPK}^{\alpha}, \quad (10.5)$$

де позначено

$$\overline{C}_{PK} = \frac{R}{q}, \quad \overline{C}_{PK}^{\beta} = \frac{\overline{C}_{PK}}{1 + \beta\tau}, \quad \overline{C}_{BPK}^{\alpha} = \frac{\overline{C}_{BPK}}{1 + \alpha\tau}$$

Обчислення концентрацій доцільно проводити в певній послідовності (за певним алгоритмом), причому спочатку *обчислюють постійні величини*, деякі з них визначають важливі фізичні і біохімічні характеристики процесів самоочищення. Невідомі числові характеристики процесу забруднення і самоочищення та концентрації BPK і РК обчислюють за таких вихідних (заданих) величин: $C_{BPK}^{(0)}$, $C_{PK}^{(0)}$, β , W , C_{BPK}^k , q_{BPK}^k , C_{PK}^k , n .

Обчислення постійних величин слід проводити в такій послідовності:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \overline{C}_{BPK} = \frac{Q}{q}, \quad Q = \sum_{k=1}^n C_{BPK}^k q_k, \quad q = \sum_{k=1}^n q_k \\ 2. \quad & \overline{C}_{PK} = \frac{R}{q}, \quad R = \sum_{k=1}^n C_{PK}^k q_k \\ 3. \quad & \tau = \frac{W}{q}, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\tau}{1 + \alpha\tau}, \quad \tau_{\beta} = \frac{\tau}{1 + \beta\tau} \\ 4. \quad & \overline{C}_{BPK}^{\alpha} = \frac{\overline{C}_{BPK}}{1 + \alpha\tau} \\ 5. \quad & \Delta C_{BPK}^{(0)} = C_{BPK}^{(0)} - \overline{C}_{BPK}^{\alpha} \\ 6. \quad & \delta = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \Delta C_{BPK}^{(0)} \\ 7. \quad & \overline{C}_{PK}^{\beta} = \frac{\overline{C}_{PK}}{1 + \beta\tau} \\ 8. \quad & C_{PK}^{CT} = \overline{C}_{PK}^{\beta} + \beta\tau_{\beta} C_{PK}^{*} - \alpha\tau_{\alpha} \overline{C}_{BPK}^{\alpha} \\ 9. \quad & \Delta C_{PK}^{(0)} = C_{PK}^{(0)} - C_{PK}^{CT} \\ 10. \quad & \gamma = \Delta C_{PK}^{(0)} - \delta \end{aligned} \quad (10.6)$$

Після обчислення постійних величин (10.6) динаміку BPK і РК визначають за такими рівностями:

$$C_{BPK}(t) = \overline{C}_{BPK}^{\alpha} + \Delta C_{BPK}^{(0)} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right) \quad (10.7)$$

$$C_{PK}(t) = C_{PK}^{CT} + \delta \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right) + \gamma \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\beta}}\right) \quad (10.8)$$

2. Розв'язати тестовий приклад обчислення концентрації та дослідження динаміки БПК та РК.

Для розв'язання тестового прикладу обчислення концентрації та дослідження динаміки БПК та РК необхідно:

- обрати програмний засіб (рекомендується табличний процесор Microsoft Excel;
- ввести вхідні дані до задачі;
- у окремі чарунки ввести формули (10.6) для обчислення постійних величин;
- створити таблицю з трьох рядків (або стовпчиків, першим з яких будуть періоди часу t) для обчислення за формулою (10.7) динаміки концентрації *органічних речовин* (БПК – біологічна потреба кисню), що легко окислюються (розкладаються мікроорганізмами) $C_{BPK}(t)$ і за формулою (10.8) концентрації *розчиненого кисню* у воді $C_{PK}(t)$ в басейні самоочищення (в озері, ставку або в водосховищі);
- відобразити досліджувану динаміку на графіку та зробити висновки.

3. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_10.xlsx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

1. З метою ознайомлення з математичними моделями динаміки органічної речовини та розчиненого у водному басейні кисню (для проведення імітаційного математичного експерименту з регулювання самоочищення та якості води на площі водозабору) розв'язати тестовий приклад

Приклад 1

Визначити динаміку концентрації *органічних речовин* $C_{BPK}(t)$ і концентрації *розчиненого кисню* у воді $C_{PK}(t)$ в басейні самоочищення (в озері, ставку або в водосховищі) при таких вихідних даних:

$$C_{БПК}^1 = 15 \text{ г/м}^3, \quad C_{БПК}^2 = 11 \text{ г/м}^3, \quad C_{БПК}^3 = 23 \text{ г/м}^3,$$

$$C_{РК}^1 = 4,3 \text{ г/м}^3, \quad C_{РК}^2 = 7,5 \text{ г/м}^3, \quad C_{РК}^3 = 3,1 \text{ г/м}^3,$$

$$q_1=30 \text{ м}^3/\text{добу}, \quad q_2=25 \text{ м}^3/\text{добу}, \quad q_3=5 \text{ м}^3/\text{добу},$$

$$\alpha = 0,99 \frac{1}{\text{добу}}, \quad \beta = 0,50 \frac{1}{\text{добу}}, \quad C_{РК}^* = 9,21, \quad T=20^\circ\text{C}$$

Як початкові значення БПК і РК в басейні обрати середні зважені концентрації

$$C_{БПК}^{(0)} = \bar{C}_{БПК}$$

$$C_{РК}^{(0)} = \bar{C}_{РК}$$

Параметром управління обрати об'єм басейну W і провести розрахунки для $W_1=300 \text{ м}^3$ та $W_2=600 \text{ м}^3$.

- У відкритій книзі *laboratorna_10.xlsx* надайте новому аркушу назву **БПК і РК**, де буде досліджуватися динаміка концентрації органічних речовин $C_{БПК}(t)$ і розчиненого кисню $C_{РК}(t)$ в басейні об'ємом $W_1=300 \text{ м}^3$.

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І	Ј	К	Л
1	Розрахунки концентрації БПК та РК											
2												
3	Вихідні дані:											
4												
5	Концентрації біологічної потреби кисню	$C_{БПК}^1 =$	15	г/м ³							$W=$	300
6		$C_{БПК}^2 =$	11	г/м ³							$Q=$	
7		$C_{БПК}^3 =$	23	г/м ³							$q=$	
8	Концентрації розчиненого кисню	$C_{РК}^1 =$	4,3	г/м ³							$C_{БПК}^- =$	
9		$C_{РК}^2 =$	7,5	г/м ³							$R=$	
10		$C_{РК}^3 =$	3,1	г/м ³							$C_{РК}^- =$	
11	Витрати (потік) води	$q_1 =$	30	м ³ /добу							$\tau =$	
12		$q_2 =$	25	м ³ /добу							$\tau_\alpha =$	
13		$q_3 =$	5	м ³ /добу							$\tau_\beta =$	
14		$\alpha =$	0,99	1/добу							$C_{БПК}^{-\alpha} =$	
15		$\beta =$	0,5	1/добу							$\Delta C_{БПК}^{(0)} =$	
16		$C_{РК}^* =$	9,21	г/м ³							$\delta =$	
17		$T =$	20	°C							$C_{РК}^{-\beta} =$	
18	Початкові значення в басейні (середні зважені концентрації)	$C_{БПК}^{(0)} =$	14	г/м ³							$C_{РК}^{CT} =$	
19		$C_{РК}^{(0)} =$	5,53	г/м ³							$\Delta C_{РК}^{(0)} =$	
20											$\gamma =$	
21	Розрахунки концентрації БПК і РК											
22	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	$C_{БПК}(t)$											
24	$C_{РК}(t)$											
25												

3. На аркуші *БПК і РК* в окремі чарунки Excel (наприклад, **A5:D19**) введіть вихідні дані до *прикладу 1* та створіть за зразком таблицю для обчислення постійних величин (діапазон **H5:I19**) і таблицю для розрахунків концентрації *БПК і РК* (діапазон **A22: L24**).
4. У чарунки **I5:I19** уведіть формули (10.6) для розрахунку постійних величин.

Наприклад, для розрахунку Q у чарунку **I5** слід увести формулу

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{C5:C7};\text{C11:C13})$$

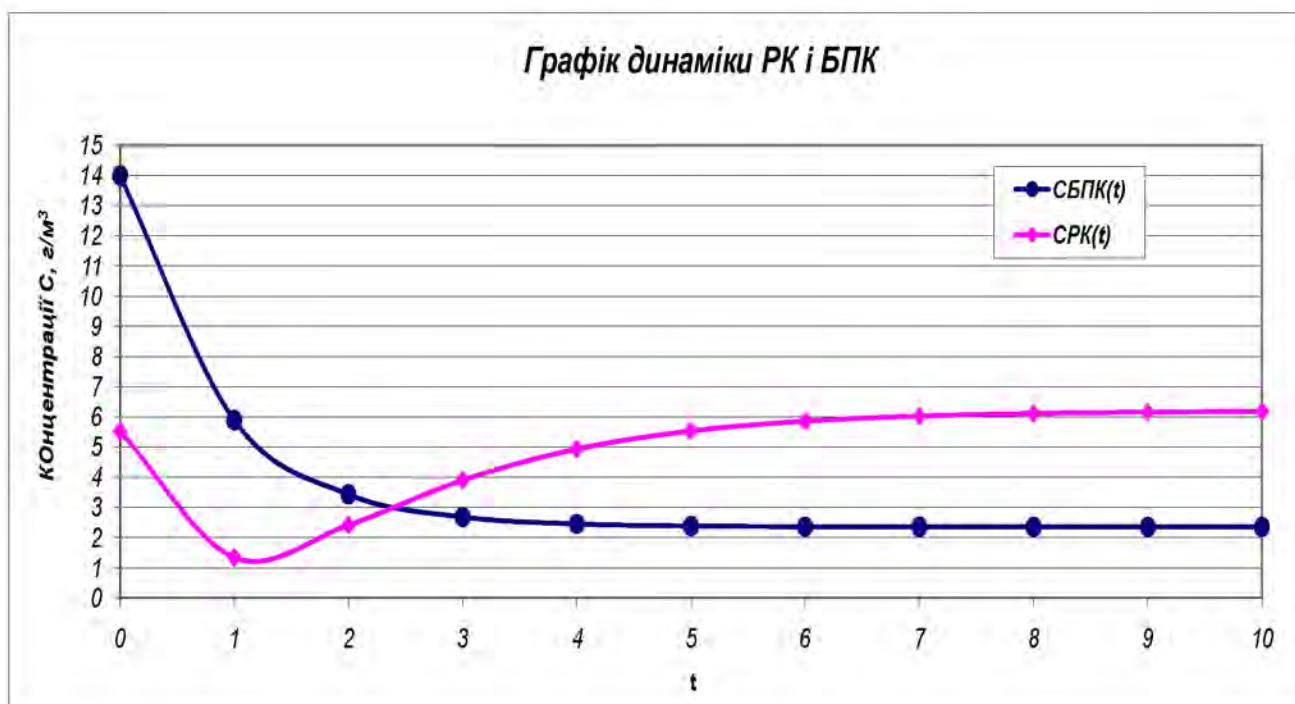
Наприклад, для розрахунку q у чарунку **I6** слід увести формулу

$$=\text{СУММ}(\text{C11:C13})$$

З обчислених постійних величин важливою характеристикою процесу самоочищення є концентрації $\overline{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}$ і $C_{\text{РК}}^{\text{CT}}$, які встановлюються за настання рівноваги. Саме до таких рівноважних значень прямують процеси взаємодії РК та БПК на ці величини орієнтуються при попередньому кількісному оцінюванні процесів самоочищення та насичення поверхневих вод киснем.

5. У чарунку **B23** уведіть формулу (10.7) для розрахунку концентрації *органічних речовин* $C_{\text{БПК}}(t)$.

$$=\$I\$13+\$I\$14*\text{EXP}(-\text{B22}/\$I\$11)$$
6. Скопіюйте формулу із чарунки **B23** в діапазон **C23:L23** для обчислення концентрацій $C_{\text{БПК}}(t)$ в інші моменти часу.
7. У чарунку **B24** уведіть формулу (10.8) для розрахунку концентрації *розчиненого кисню* $C_{\text{РК}}(t)$.
8. Скопіюйте формулу із чарунки **B24** в діапазон **C24:L24** для обчислення концентрацій $C_{\text{РК}}(t)$ в інші моменти часу.
9. За розрахованими даними побудуйте графіки динаміки БПК і РК та проаналізуйте результат. **Запишіть висновок** у будь-яку чарунку Excel.



Отже, за перші 2,3 доби концентрація РК в басейні різко знижується, при цьому також знижується концентрація БПК. До третьої доби концентрації врівноважуються, а потім концентрація РК перевищує концентрацію БПК. Уже на шосту добу концентрації БПК і РК урівноважуються, тобто процес стабілізується (стаціонарний процес).

10. Збережіть файл із іменем *laboratorna_10.xlsx* у Вашій папці диску D: і завершіть роботу з табличним процесором.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату A4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, відповіді на контрольні запитання та роздрукований на принтері результуючий документ *laboratorna_10.xlsx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Яка система рівнянь лежить в основі моделі Фелпса-Стрітера дослідження кисневого режиму і динаміки органічної речовини?
2. Наведіть алгоритм (вказіть послідовність) використання математичної моделі динаміки органічної речовини і розчиненого кисню.
3. Прокоментуйте графіки динаміки БПК і РК.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в экологии: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопецький, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
6. Ляшенко І. М. Основы математического моделирования экономических, экологических та соціальних процесів. [Навч.посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
7. Яскевець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Яскевець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 6. ОСНОВНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 11

Тема: Чисельні розрахунки концентрації забруднюючих речовин атмосферного повітря в Excel

Мета: Ознайомитися з основними підходами до моделювання забруднення атмосфери, вміти розрахувати величину забруднення на поверхні землі, обумовленого викидами із точкових джерел забруднення

Завдання:

1. Дослідити розсіювання забруднювачів в атмосфері за Гаусовою моделлю розсіювання.
2. Розв'язати тестові приклади обчислення приземної концентрації забруднення від викидів із точкового джерела.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – таблицним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

Найбільш часто різного роду забруднювачі надходять у наземні екосистеми внаслідок їх випадання із атмосфери. Розрізняють випадання глобальні, тобто випадання забруднювачів на значних територіях та локальні. При локальних випаданнях забруднювачі випадають на території прилеглий до джерела викиду забруднення. Тут слід розрізняти джерела точкові та розподілені.

Всі забруднювачі атмосфери, які викидаються точковими та розподіленими джерелами, переносяться, розсіюються і концентруються в атмосфері при різноманітних метеорологічних та топографічних умовах. Атмосферний цикл розсіювання забруднювачів починається із викидів забруднювачів в атмосферу, після чого відбувається їх перенесення та змішування з атмосферою. Цикл завершується, коли забруднювачі осідають на рослинність, ґрунт, поверхню води, або переносяться у космічний простір.

Динаміка та густина локальних випадань нерівномірні і залежать від виду, висоти викиду, пір року, погоди, напрямку вітру, геологічних характеристик місцевості і т. ін. При локальних випаданнях суттєву роль відіграють характеристики джерела викиду. Тобто, розсіювання в атмосфері викидів залежить від багатьох факторів: фізичних та хімічних властивостей речовини викидів, метеорологічних умов в оточуючій атмосфері, розміщення джерела викиду відносно перепон руху повітря та характеру місцевості в напрямку вітру. Викиди можуть складатися із газу та частинок. Якщо частинки мають розмір 20 мкм і менше, то їх швидкість осідання настільки мала, що вони рухаються як газові молекули. Тому аналітичні підходи, що використовуються при розгляді розсіювання газів, можуть бути використані також і для оцінки розсіювання малих частинок. Частинки великих розмірів не можуть бути описані подібним чином, оскільки вони мають значну швидкість осідання, що приводить до підвищених концентрацій таких частинок поблизу джерела викиду порівняно з концентраціями газу, що одночасно викидається.

Тож, якщо розміри частинок викидів із труб та вентиляційних пристроїв не більше 20 мкм, то швидкість їх осідання невелика і вони рухаються подібно молекулам газу. Для забезпечення максимального розсіювання, продукти викиду повинні залишати трубу, маючи достатню підйомну силу, щоб підніматися вгору від горловини труби. За відсутності вітру струмені з малою густиною піднімаються до великих висот, так що приземні концентрації невеликі. Великі зважені частинки та густі газові струмені опускаються до рівня землі поблизу труби. Щоб відвернути відхилення струменя вниз поблизу горловини труби, швидкість газу (V_s), що викидається, повинна бути достатньо великою. Можна використати наступне наближене співвідношення: $V_s/u > 2$. Тобто, спадаючий рух від горловини труби буде мінімальним, коли швидкість викиду газу буде вдвічі перевищувати швидкість вітру на рівні горловини труби.

Для окремих точкових джерел, згідно теорії масопередачі, **концентрація частинок газу $C(x,y,z)$ в будь-який момент часу описується рівнянням**, в допущенні, що швидкість вітру має напрямок осі x :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(C u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(D_x C)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(D_y C)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(D_z C)}{\partial z}\right) \quad (11.1)$$

Для розглядуваного класу задач нас цікавить поведінка газу на великих проміжках часу, коли встановлюється квазістаціонарний стан, тобто

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Зробимо деякі спрощуючі припущення, а саме:

- перенос маси, пов'язаний з перемішуванням маси вздовж осі x значно перевершує вклад масової дифузії в цьому напрямку

- швидкість вітру постійна, а компоненти тензора дифузії постійні, тобто не залежать від концентрації.

При цих спрощеннях рівняння приймає вигляд

$$u \frac{\partial C}{\partial t} = D_y \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + D_z \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (11.2)$$

Загальний вигляд розв'язку цього рівняння:

$$C = K \frac{1}{x} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{y^2}{D_y} \right) + \left(\frac{z^2}{D_z} \right) \right] \frac{u}{4x} \right\} \quad (11.3)$$

В цьому виразі K – константа, значення якої визначається умовами конкретної задачі. Одна із таких умов полягає в тому, що маса забруднювача, що проходить через будь-яку вертикальну площину у напрямку вітру від джерела повинна бути постійною і дорівнювати потужності Q джерела викиду

$$Q = \iint u C dy dz$$

Фактично, ця умова означає відсутність яких-небудь реакцій, у тому числі явищ сорбції та десорбції, які можуть видаляти забруднювачі із загального масового потоку. Інтегрування по y проводиться в границях від мінус до плюс безкінечності (відхилення по перпендикуляру від центральної лінії), границі інтегрування по z визначаються конкретною задачею.

Порядок і методика виконання завдань

1. Дослідити розсіювання забруднювачів в атмосфері за Гаусовою моделлю розсіювання

Для ефективного математичного моделювання забруднення атмосфери слід врахувати, що розсіювання в атмосфері викидів із труб та вентиляційних пристроїв залежить від багатьох факторів: фізичних та хімічних властивостей речовини, що викидається, метеорологічних умов в оточуючій атмосфері, розміщення труби відносно перепон руху повітря та характеру місцевості у напрямку вітру.

Точкове джерело на рівні землі

У випадку точкового наземного джерела інтегрування по z проводиться в границях від 0 до безкінечності і отримуємо

$$K = \frac{Q}{2\pi (D_x D_y)^{1/2}} \quad (11.4)$$

Отже для концентрації забруднення в напрямку вітру від точкового наземного джерела отримуємо:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right], \quad (11.5)$$

де введено позначення

$$\sigma_y^2 = \frac{2 D_y y}{u}, \quad \sigma_z^2 = \frac{2 D_z z}{u} \quad (11.6)$$

Якщо прийняти y та z рівними нулю, то отримаємо, очевидно значення приземної концентрації на осі x , тобто на центральній лінії від точкового наземного джерела:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \quad (11.5a)$$

Точкове джерело на висоті

У випадку точкового джерела розміщеного на висоті H над земною поверхнею, можна інтегрування по z провести в границях мінус - плюс безкінечність, так, що отримуємо

$$K = \frac{Q}{4\pi (D_x D_y)^{1/2}} \quad (11.7)$$

Для викиду із труби з ефективною висотою H експоненціальний член у виразі (6.6) слід змінити шляхом заміни $z \rightarrow z-H$.

З урахуванням ефекту віддзеркалення, **вираз для концентрації забруднення у викиді при піднятого джерела** можна отримати наступний вираз:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right) \left\{ \exp \left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2} \right] + \exp \left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\} \quad (11.8)$$

Це, так звана, **гаусова модель переносу**.

На земній поверхні ($z=0$) маємо

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right) \left\{ \exp \left[-\frac{(H)^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\} \quad (11.8a)$$

Якщо необхідно оцінити значення концентрації на центральній лінії, то в (6.9a) слід покласти $y=0$.

Для практичного використання приведених формул слід врахувати, що, окрім фізичних даних таких як координати x, y, z , потужність джерела Q та ефективна висота H , потрібно знати величини, що характеризують швидкість вітру u , а також σ_y та σ_z . Величина швидкості вітру є функцією висоти z . Типовою залежністю $u(z)$ є вираз

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^p \quad (11.9)$$

де u_1 – швидкість вітру на висоті z_1 . Практично за величину u_1 приймають значення швидкості вітру виміряне на висоті $z_1=10$ м.

Профіль швидкості вітру, а отже і показник p , залежить від характеристик атмосфери. Зокрема:

- для міської забудови можна взяти $p=0.40$,
- для районів густого лісу, міст та приміських зон $p=0.28$,
- для плоскої відкритої сільської місцевості, озер та морів приймають $p=0.16$.

Значення σ_y та σ_z пов'язані з коефіцієнтами дифузії в напрямку осей y та z . Ці величини є функціями положення точки спостереження в напрямку вітру від джерела, а також функціями умов стійкості атмосфери. Для оцінки цих величин проведено досить багато експериментальних досліджень, в результаті яких отримані діаграми.

Лінійні джерела

У ряді випадків, коли ряд промислових підприємств, розташованих вздовж річки, порту, або пряма автомагістраль з інтенсивним рухом автотранспорту, забруднення може моделюватися неперервним безкінечним лінійним джерелом. Коли швидкість вітру перпендикулярна до такого джерела, концентрація забруднювача у напрямку вітру від джерела може бути записана у вигляді:

$$C(x, y, 0) = \frac{2 \cdot q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z u} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \right\} \quad (11.10)$$

де q – потужність джерела на одиницю довжини (наприклад вона може бути виражена в г/с м). У цей вираз не входить стандартне відхилення у горизонтальному напрямку σ_y , оскільки розсіювання газів поперек напрямку вітру від різних ділянок лінійного джерела випромінювання взаємно компенсується. Відмітимо також, що у цей вираз не входить y , оскільки при заданому x концентрації для всіх y однакові.

Якщо неперервне лінійне джерело має обмежену довжину, ми повинні враховувати крайові ефекти. Останні мають суттєве значення, оскільки при віддаленні від джерела у напрямку вітру область впливу джерела буде розширюватися. Якщо лінійне джерело перпендикулярне напрямку вітру, зручно розташувати вісь x у напрямку вітру так, щоб вона проходила через точку спостереження. Тоді кінці лінійного джерела будуть розташовуватися на осі y , перпендикулярно напрямку вітру і мати координати y_1 і y_2 , причому $y_1 < y_2$. Тоді концентрація вздовж осі x на рівні землі буде визначатися виразом:

$$C(x, 0, 0) = \frac{2 \cdot q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z u} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5 p^2) dp \quad (10.11)$$

2. Розв'язати тестові приклади обчислення приземної концентрації забруднення від викидів із точкового джерела.

Для розв'язання тестових прикладів обчислення приземної концентрації забруднення від викидів із точкового джерела необхідно:

- обрати програмний засіб (пропонується табличний процесор Microsoft Excel);
- ввести вхідні дані до задачі;
- у окрему чарунку ввести формулу (11.8) для обчислення рівня приземної концентрації;
- для дослідження впливу факторів на рівень забруднення, слід обрати змінюваний параметр, ввести з певним кроком значення обраної величини і для цієї кількості спостережень обчислити значення приземної концентрації
- відобразити досліджувану залежність на графіку та зробити висновки.

3. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_11.xlsx*.

**Завдання для практичного виконання,
порядок і рекомендації щодо їх виконання**

1. Ознайомтеся з задачею стосовно розсіювання забруднювачів в атмосфері. Розрахуйте приземну концентрацію забруднення від викидів із точкового джерела.

Приклад 1

Двоокис сірки викидається у кількості 160 г/с із труби ефективною висотою 60 м. Швидкість вітру на рівні горловини труби рівна 6 м/с, а атмосферна стійкість відповідає класу D для хмарного дня.

Визначити приземні концентрації на центральній лінії на віддалі 500 м від труби в мікрограмах на кубічний метр.

Для віддалі 500 м значення σ_y та σ_z відповідно рівні 36 і 18,5 м.

2. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel для розв'язання задачі **Приклад 1** по обчисленню приземної концентрації забруднення.
3. Надайте аркушу *Лист 1* назву *Приклад_1*.

4. На аркуші *Приклад_1* в окремі чарунки діапазону **A2:K8** введіть вихідні дані до *прикладу 1* та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Моделювання забруднення атмосфери										
1											
2	Вихідні дані:										
3	Щільність	Q=	160	г/с							
4	Швидкість вітру, м/с	u=	6	м/с							
5	Висота труби	H=	60	м							
6	Віддалі від джерела викиду	y=	0	м							
7		z=	0	м							
8		x=	500	м		$\sigma_y =$	36	м		$\sigma_z =$	18,5
9											
10	Розрахунки:										
11	Концентрація ЗР, г/м ³	C=	6,626E-05	г/м ³							
12	Концентрація, мкг/м ³	C=	66,26	мкг/м ³							
13											
14											

5. У чарунку **C11** введіть формулу гаусової моделі переносу забруднюючих речовин (11.8) для обчислення приземної концентрації на заданій віддалі по центральній лінії від труби в грамах на кубічний метр.

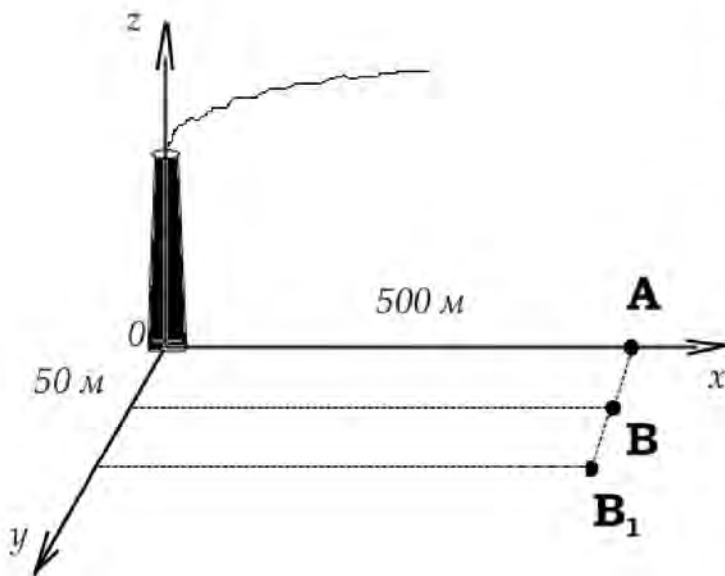
$$=C3/(2*ПИ()*C4*F8*J8)*EXP(-(1/2)*C6^2/F8^2)*(EXP(-(1/2)*(C7-C5)^2/J8^2)+EXP(-(1/2)*(C7+C5)^2/J8^2))$$

6. У чарунку **C12** введіть формулу для обчислення приземної концентрації на заданій віддалі по центральній лінії від труби в мікрограмах на кубічний метр, виконуючи посилання на чарунку **C11**. Проаналізуйте результат.
7. Зробіть копію аркушу *Приклад_1*, якій надайте назву *Приклад_2*
8. На аркуші *Приклад_2* розв'яжіть однойменну задачу, змінивши лише окремі вхідні дані:

Приклад 2

Для умов попереднього прикладу 1 визначити приземну концентрацію у точці **В**, віддаленій на 50 м у напрямку, перпендикулярному центральній лінії і що виходить з точки на цій лінії, віддаленій від труби на 500 м.

9. Проаналізуйте отриманий результат:



При відхиленні від центральної лінії на 50 м, що становить всього 10 % віддалі від труби

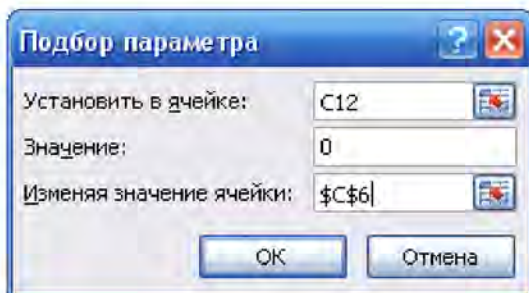
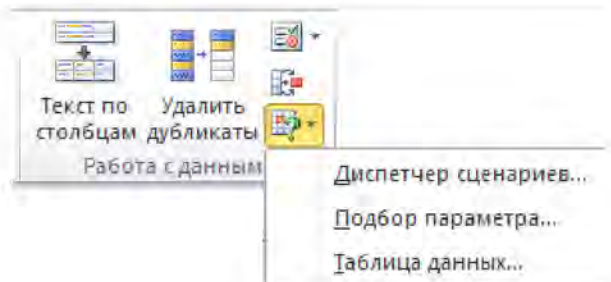
$y/x = 50 \text{ м} / 500 \text{ м} = 0,1 = 10 \%$,
приземна концентрація зменшиться майже на 62%
 $(66,26 - 25,26) / 66,26 \approx 0.62 = 62\%$

10. На аркуші *Приклад_2* обчисліть значення приземної концентрації у точці B_1 , віддалі якої від центральної лінії 100 м (у чарунку **C6** уведіть значення 100).

Оцініть, *як буде змінюватися концентрація при віддаленні від центральної лінії*. Запишіть цей висновок у будь-яку вільну чарунку аркушу *Приклад_2*.

11. Спробуйте визначити, чи може бути приземна концентрація рівна нулю і на якій віддалі у від точки А (розташована на центральній лінії за 500 м від труби). Для цього скористайтеся засобом Подбор параметра Excel:

- встановіть курсор у чарунку **C12**;
- виконайте команду **Работа с данными** ⇒ **Подбор параметра** стрічки **Данные**;
- у вікні **Подбор параметра** встановіть необхідні опції



12. Збережіть результати роботи у Вашій папці диску $D:\backslash$ з іменем *laboratorna_11.xlsx*.

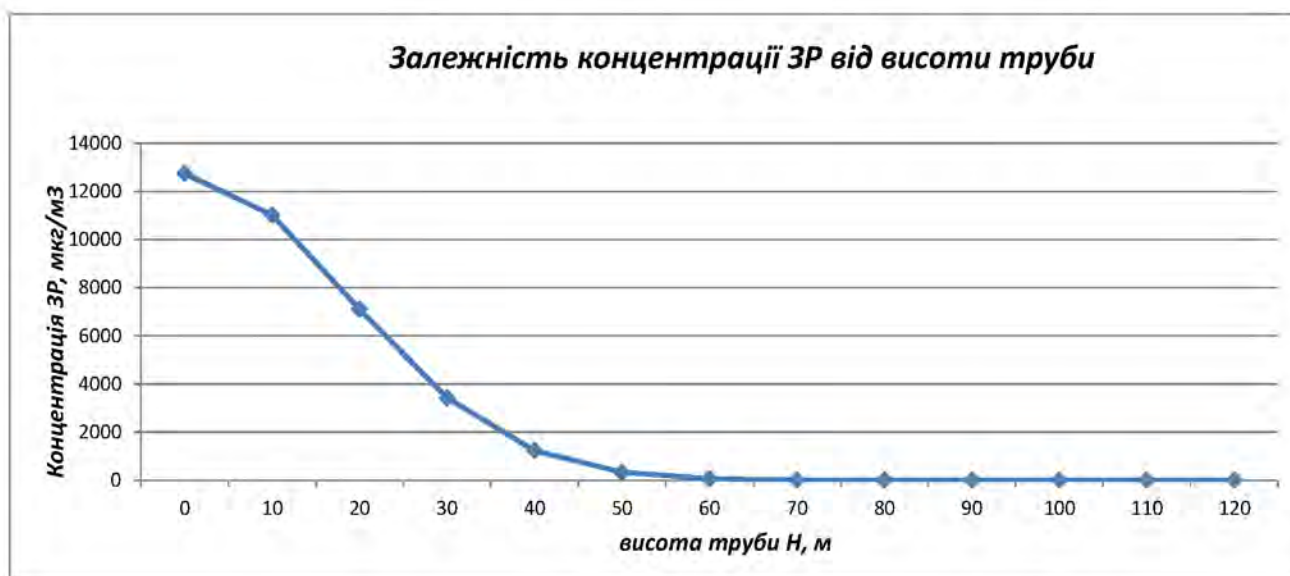
13. З'ясуйте, **чи залежить приземна концентрація** забруднювача у певній точці на заданій віддалі від джерела викиду (наприклад, у точці А) **від висоти труби**.

Для цього:

- зробіть копію аркушу *Приклад_1*, якій надайте назву *Приклад_1_висота*;
- на аркуші *Приклад_1_висота* уведіть різні значення висоти труби у чарунки **C5:O6**, використовуючи Автозаповнення;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Моделювання забруднення атмосфери														
2	(змiна висоти труби)														
3	Вихідні дані:														
4	Щільність	Q=	160	г/с											
5	Швидкість вітру, м/с	u=	6	м/с											
6	Висота труби	H=	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
7	Віддалі від джерела	y=	0	м											
8	викиду	z=	0	м											
9		x=	500	м											
10															
11	Розрахунки:														
12	Концентрація ЗР, г/м ³	C=	0,013	0,011	0,007	0,003	0,001	3E-04	7E-05	1E-05	1E-06	9E-08	6E-09	3E-10	9E-12
13	Концентрація, мкг/м ³	C=	12745	11013	7105	3422	1231	330,5	66,26	9,918	1,109	0,092	0,006	3E-04	9E-06

- у чарунці **C11** змініть формулу для розрахунку концентрації ЗР – задайте у формулі абсолютні посилання на всі чарунки, окрім **C5**,
- скопіюйте формулу із чарунки **C11** у чарунки діапазону **D11:O11** використовуючи Автозаповнення;
- використовуючи Автозаповнення, скопіюйте формулу із чарунки **C12** у чарунки діапазону **D12:O12**;
- побудуйте графік зміни концентрації ЗР у мкг/м³ у залежності від висоти труби



- зробіть висновок чи залежить *приземна концентрація* забруднюючої речовини від висоти труби.

14. Визначте, чи залежить *приземна концентрація забруднювача* у певній точці при фіксованій віддалі від труби (наприклад, у точці А) від *швидкості вітру*.

Для цього:

- зробіть копію аркушу *Приклад_1*, якій надайте назву *Приклад_1_вітер*;
- на аркуші *Приклад_1_вітер* уведіть різні значення швидкості вітру у чарунки **C4:V4**, використовуючи Автозаповнення;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
	Моделювання забруднення атмосфери (змiна швидкостi вiтру)																					
1																						
2	Вихiднi данi:																					
3	Щiльнiсть	Q=	160 г/с																			
4	Швидкiсть, м/с	u=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5		H=	60 м																			
6	Вiддaлi вiд	y=	0 м																			
7		z=	0 м																			
8	джерела викиду	x=	500 м		$\sigma_y = 36$ м			$\sigma_z = 18,5$ м														
9																						
10	Розрахунки:																					
11	Концентрацiя ЗР, г/м³	C=	0,0004	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	Концентрацiя, мкг/м³	C=	397,56	199	133	99,4	79,5	66,3	56,8	49,7	44,2	39,8	36,1	33,1	30,6	28,4	26,5	24,8	23,4	22,1	20,9	19,9

- у чарунці **C11** змініть формулу для розрахунку концентрації ЗР – задайте у формулі абсолютні посилання на всі чарунки, окрім **C5**,
- скопіюйте формулу із чарунки **C11** у чарунки діапазону **D11:V11** використовуючи засіб Автозаповнення;
- використовуючи Автозаповнення, скопіюйте формулу із чарунки **C12** у чарунки діапазону **D12: V 12**;

- побудуйте графік зміни концентрації ЗР у мкг/м^3 у залежності від швидкості вітру



- зробіть висновок чи залежить приземна концентрація забруднюючої речовини від швидкості вітру.
15. У довільній чарунці аркушу *Приклад_1* на основі проведених розрахунків запишіть висновок – від чого залежить приземна концентрація забруднювача атмосфери та опишіть характер залежності (збільшується, зменшується, не змінюється тощо). Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_11.xlsx*.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері всі аркуші документу *laboratorna_11.xlsx*, що отримані після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Охарактеризуйте атмосферний цикл розсіювання забруднювачів, що викидаються точковими та розподіленими джерелами.
2. На які дві групи можна поділити випадання забруднення у залежності від охопленої території.
3. Якою повинна бути швидкість газу (V_s), що викидається, щоб

відвернути відхилення струменя вниз поблизу горловини груби.

4. Яким рівнянням у загальному описується концентрація частинок газу $C(x,y,z)$ в будь-який момент часу для окремих точкових джерел, згідно теорії масопередачі.
5. За якою формулою розраховується концентрація забруднення в напрямку вітру від точкового наземного джерела.
6. Гаусова модель переносу забруднення при викиді від піднятого джерела
7. Куди спрямовані вісі X , Y , Z при моделюванні розповсюдження домішок в атмосфері?
8. Чи може забруднення від ряду промислових підприємств, розташованих вздовж річки, порту, або пряма автомагістраль з інтенсивним рухом автотранспорту, моделюватися неперервним безкінечним лінійним джерелом?

Список рекомендованої літератури:

1. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
2. Гладкий А. В. Основи математичного моделювання в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
3. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
4. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
5. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. [Навч.посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
6. Яскевець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Яскевець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 12

Тема: Математичне моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86

Мета: Ознайомитися з основними підходами до моделювання забруднення атмосфери за методикою ОНД-86, вміти розрахувати величину максимальної концентрації забруднення на поверхні землі, обумовленого викидами із точкових джерел забруднення

Завдання:

1. Підготовка та введення вхідних даних у чарунки табличного процесора для проведення розрахунків приземної концентрації забруднення.
2. Моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

Особливості розповсюдження домішок в атмосфері залежать від параметрів викидів і метеорологічних умов. Так, концентрація забруднюючих речовин в повітрі навколо підприємств, що являються джерелами викидів, залежить від впливу таких факторів:

- висота труби (H), з якої здійснюється викид забруднюючих речовин – чим вища труба, тим краще забруднювачі розсіюються в повітрі;
- діаметр труби (D) – із збільшенням діаметра труби збільшується кількість забруднюючих речовин, що надходять в атмосферу;
- кількість труб для здійснення викидів на одному підприємстві;
- швидкість викиду газоповітряної суміші;
- температура газоповітряної суміші, що викидається;
- температура навколишнього середовища;
- постійність або періодичність здійснення викидів в атмосферу;
- швидкість та напрям вітру – при високій турбулентності повітря краще перемішується і забруднюючі речовини розсіюються;
- метеорологічні умови;

- особливості рельєфу;
- наявність або відсутність забудови території, на якій знаходиться джерело забруднення;
- відстань від джерела забруднення.

Враховуючи всі ці фактори розроблені певні математичні моделі для розрахунку забруднення атмосферного повітря.

Деякі з них виключають або приймають за сталі значення певних факторів, тим самим спрощуючи модель, але ці спрощення можуть бути дійсними лише для певних заданих умов і моменту часу. Фактори, від яких залежить шукана величина і є обмежувачими факторами.

Чисельна оцінка і прогнозування концентрації шкідливої домішки можна проводити на основі інтегрування рівняння турбулентної дифузії (М. Берлянд):

$$u \frac{\partial C}{\partial x} - \omega_a \frac{\partial C}{\partial z} = k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial C}{\partial z} - \varepsilon_a, \quad (12.1)$$

де C – концентрація домішки у приземному шарі повітря;

u – швидкість вітру;

ω_a – швидкість осідання домішки;

k_z, k_y – вертикальна та горизонтальна складові коефіцієнта турбулентного обміну

ε_a – приток та стік домішки за рахунок внутрішніх причин.

Інтегрування дає змогу отримати максимальну концентрацію C_m , яка утворюється при нормативних метеоумовах. Ці висновки увійшли до нормативного документа ОНД-86, в якому наведені формули для розрахунків максимальних концентрацій у приземному 2-метровому шарі повітря у період нормативних метеоумов та формули обчислення відстаней, на яких відбуваються ці концентрації.

Математичне моделювання та прогнозування стану атмосферного повітря за вмістом забруднюючих речовин у відповідності до методики ОНД 86 є досить простим. Воно дає змогу проводити обчислення як «вручну», так і за допомогою пакетів прикладних програм, що автоматизують розрахунок. Розрахунок можна проводити в програмному середовищі Mathcad, яке дозволяє автоматизовано проводити обчислення та виводити графіки залежностей концентрації забруднюючих речовин в повітрі від відстані до джерела здійснення викиду.

Ступінь небезпеки забруднення атмосферного повітря характеризується найбільш розрахованим значенням концентрації, що відповідає несприятливим метеорологічним умовам, в тому числі небезпечності швидкості вітру. Норми не розповсюджуються на розрахунок концентрацій на дальніх (більше 100 км) відстанях від джерела викиду.

Для джерел в розрахункових формулах довжина (висота) виражена в метрах (м), час – у секундах (с), маса забруднюючих речовин – в грамах (г), їх концентрація в атмосферному повітрі – в міліграмах на кубічний метр (мг/м³), концентрація на виході з джерела – грамах на кубічний метр (г/м³).

Розрахунок концентрації забруднюючих речовин, що повністю або частково хімічно трансформуються в більш небезпечні речовини, проводиться по кожній вихідній і утвореній речовині окремо. При цьому потужність джерела для кожної речовини встановлюється з розрахунком максимально можливої трансформації вихідної речовини в більш токсичні. Розрахунками визначаються разові концентрації.

Порядок і методика виконання завдань

1. Підготовка та введення вхідних даних у чарунки табличного процесора для проведення розрахунків приземної концентрації забруднення.

Для оцінки і прогнозу забруднення атмосфери стаціонарними джерелами, використовується методика ОНД-86. Вона дає змогу створити математичну модель для оцінки і регуляції якості навколишнього середовища. З допомогою використання такої моделі розраховується максимальне значення приземної концентрації шкідливої речовини та сумарна концентрація шкідливих речовин.

Вихідними параметрами для моделювання процесів розсіювання забруднюючих речовин в атмосферному повітрі, що вводять у чарунки табличного процесора Microsoft Excel (чи спеціально розроблених інших програм) є: висота труби (H), діаметр труби (D), швидкість виходу пило-газової суміші з труби (V), температура пило-газової суміші T_2 , маса забруднюючої речовини, що викидається в атмосферу (M)

Коефіцієнт A , що залежить від температурної стратифікації атмосфери, безрозмірний коефіцієнт F , що враховує швидкість осідання ЗР в атмосферному повітрі, безрозмірний коефіцієнт η , що враховує вплив рельєфу місцевості вважаються відомими для кожного конкретного випадку.

2. Моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86.

Максимальне значення приземної концентрації ЗР C_m ($\text{мг}/\text{м}^3$) при викиді газоповітряної суміші з одиничного точкового джерела з круглим устям, що досягається при несприятливих метеорологічних умовах на відстані x_m від джерела, згідно ОНД-86 розраховується за формулою:

$$C_m = \frac{(A \cdot M \cdot F \cdot m \cdot n \cdot \eta)}{H^2 \cdot \sqrt{V \cdot \Delta T}} \quad (12.2)$$

де A – коефіцієнт, що залежить від температурної стратифікації атмосфери, для території країни $A=200$;

F – безрозмірний коефіцієнт, що враховує швидкість осідання ЗР в атмосферному повітрі, $F=1$ для газів та мілкодисперсних аерозолів;

m, n – коефіцієнти, що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду;

η – безрозмірний коефіцієнт, що враховує вплив рельєфу місцевості. Для всієї Полтавської області, де перепади висот не перевищують 50 м на 1 км, $\eta=1$;

ΔT (°C) – різниця між температурою газоповітряної суміші та температурою навколишнього середовища.

Формула для розрахунку середньої швидкості виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду (м/с):

$$\omega_0 = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot D^2}, \quad (12.3)$$

де V , м³/с – витрата газоповітряної суміші;

D , м – діаметр устя джерела викиду.

Для визначення коефіцієнтів m і n слід розрахувати f , V_m , V_{ml} :

$$f = 1000 \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot D}{H^2 \cdot \Delta T} \quad (12.4)$$

$$V_m = 0.65 \cdot \sqrt[3]{\frac{V \Delta T}{H}} - \text{для гарячих часток} \quad (12.5)$$

$$V_{ml} = 1.3 \cdot \frac{\omega_0 \cdot D}{H} \quad (12.6)$$

$$f_e = 800 \cdot V_{ml}^3 - \text{для холодних часток} \quad (12.7)$$

Коефіцієнт m визначається за формулою:

$$m = \begin{cases} \frac{1}{0.67 + 0.1 \cdot \sqrt{f} + 0.34 \cdot \sqrt[3]{f}}, & \text{якщо } f < 100 \\ \frac{1.47}{\sqrt[3]{f}}, & \text{якщо } f \geq 100 \end{cases} \quad (12.8)$$

Коефіцієнт n у випадку $f \leq 100$ визначається за формулою:

$$n = \begin{cases} 1 & \text{якщо } V_m \geq 2 \\ 0.532 \cdot V_m^2 - 2.13 \cdot V_m + 3.13 & \text{якщо } 0.5 \leq V_m < 2 \\ 4.4 \cdot V_m & \text{якщо } V_m < 0.5 \end{cases} \quad (12.9)$$

*Розрахунок відстані до джерела викиду, при якому
приземна концентрація досягає максимального значення*

Для розрахунку відстані до джерела викиду, при якому спостерігається максимальна приземна концентрація при несприятливих метеорологічних умовах, використовується формула:

$$x = d \cdot H \cdot \frac{5 - F}{4}, \quad (12.10)$$

де H , м – висота джерела викиду над рівнем землі;

F – безрозмірний коефіцієнт, що враховує швидкість осідання ЗР в атмосферному повітрі, $F=1$ для газів та мілкодисперсних аерозолів;

d – безрозмірний коефіцієнт, що при $f < 100$, визначається за формулою:

$$d = \begin{cases} 2.48 \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & \text{якщо } V_m < 0.5 \\ 4.95 \cdot V_m \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & \text{якщо } 0.5 \leq V_m < 2 \\ 7 \cdot \sqrt{V_m} \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & \text{якщо } V_m \geq 2 \end{cases} \quad (12.11)$$

Розрахунок концентрації забруднюючих речовин в атмосфері без врахування впливу забудови можна здійснити також за допомогою програми ОНД-86 для точкових джерел, або ж з використанням математичних редакторів або табличного процесора, увівши всі необхідні формули.

На основі моделювання можна зробити висновок, що досліджувана екосистема (атмосферне повітря) знаходиться нормальному / критичному стані. Викиди від підприємств та їхні сумарні викиди перевищують / не перевищують допустимі норми, концентрації забруднюючих речовин, що встановилися в приземних шарах повітря перевищують / не перевищують гранично-допустимих концентрацій (ГДК), встановлених для даних речовин.

**4. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі.
За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_12.xlsx*.**

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

1. Для моделювання та чисельного прогнозування концентрації шкідливих домішок за допомогою дифузійної моделі та, відповідно, ознайомлення з методикою моделювання забруднення атмосферного повітря ОНД-86 розв'яжіть **Приклад 1**.

Приклад 1

Для заданих трьох підприємств м. Полтави розрахувати максимальні концентрації забруднюючих речовин від викидів стаціонарних джерел та максимальні відстані, на яких досягаються такі концентрації, за методикою ОНД-86. Вихідні дані до математичної моделі наведені в таблиці 12.1.

При моделюванні розповсюдження шкідливих домішок в приземному шарі атмосфери врахувати, що:

- коефіцієнт стратифікації атмосфери A , що враховує розсіювальну здібність атмосфери при несприятливих умовах вертикального та горизонтального перемішування, може змінюватися від 140 до 250. Для території України $A=200$;
- безрозмірний коефіцієнт η , що враховує вплив рельєфу місцевості на концентрацію домішок, для областей із перепадами висот не більше 50 м на 1 км, $\eta = 1$;
- безрозмірний коефіцієнт F , що враховує швидкість осідання забруднюючої речовини в атмосферному повітрі, для газів та мілкодисперсних аерозолів $F=1$;
- температура повітря $T=25^{\circ}\text{C}$.

Таблиця 12.1

Вихідні дані для моделювання розповсюдження шкідливих домішок

Показник	Підприємство I	Підприємство II	Підприємство III
Висота джерела викиду над рівнем землі (висота труби, з якої здійснюється викид забруднюючих речовин), $H, \text{ м}$	15,6	12,1	15,6
Діаметр устя джерела викиду (труби), $D, \text{ м}$	0,8	0,6	0,8
Витрата газоповітряної суміші (швидкість викиду пило-газової суміші з труби), $V, \text{ м}^3/\text{с}$	0,6	0,5	0,7

Показник		Підприємство I	Підприємство II	Підприємство III
Температура газоповітряної суміші, що викидається, $T_2, ^\circ\text{C}$		91,6	129,8	83,4
Маса речовини-забруднювача, що викидаються в атмосферу за одиницю часу, $M, \text{г/с}$	SO_2			0,014
	CO	0,0656	0,101	
	NO_2	0,0494		0,082
	Пул	0,0844	0,049	0,04
	NO			0,101

- Завантажте табличний процесор Microsoft Excel. У новому документі надайте аркушу Лист 1 назву **Підприємство_I**.
- На аркуші **Підприємство_I** в окремі чарунки діапазону **A5:D22** введіть вихідні дані до **прикладу 1** по підприємству I та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком.
- У чарунки **E18:E22** введіть ГДК забруднюючих речовин у мг/м^3 .

Речовина	ГДК, мг/м^3
SO_2	0,5
CO	5
NO_2	0,085
Пул	0,5
NO	0,4

- У чарунці **C23** обчисліть загальну масу забруднювачів, що викидаються в атмосферу за одиницю часу.
- Розрахунок приземної концентрації від викидів забруднюючих речовин проводиться за формулою (12.2)

$$C_m = \frac{(A \cdot M \cdot F \cdot m \cdot n \cdot \eta)}{H^2 \cdot \sqrt{V \cdot \Delta T}}$$

У даній формулі невідомими є значення коефіцієнтів m і n , що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду. Щоб їх розрахувати, необхідно виконати ряд обчислень:

У чарунках **C26:C30** послідовно виконайте проміжні розрахунки:

- у чарунку **C26** введіть формулу (12.3) для обчислення середньої швидкості виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду (м/с);
- у чарунку **C27** введіть формулу (12.4);
- у чарунку **C28** введіть формулу (12.5);
- у чарунку **C29** введіть формулу (12.6);
- у чарунку **C30** введіть формулу (12.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Модельювання поширення забруднюючих речовин в атмосфері від викидів стаціонарних джерел за методикою ОНД-86								
2									
3	Визначення максимального значення приземної концентрації C ($\text{мг}/\text{м}^3$) забруднюючої речовини при викиді газоповітряної суміші з одиничного точкового джерела з круглим устям, що досягається при несприятливих метеорологічних умовах на відстані $x_{\text{зм}}$ від джерела								
4									
5	Вихідні параметри для модельювання процесів розсіювання забруднюючих речовин в атмосферному повітрі:				Проміжні розрахунки:				
6									
7	Коефіцієнт, що залежить від температурної стратифікації атмосфери	A= 200			для території України		Різниця між температурою газоповітряної суміші та температурою навколишнього середовища		
8	Безрозмірний коефіцієнт, що враховує швидкість осідання забруднюючої речовини в атмосферному повітрі	F= 1			для газів та мілкодисперсних аерозолів		m= 1,1949		
9	Безрозмірний коефіцієнт, що враховує вплив рельєфу місцевості	η= 1			переломи висот не перевищують 50 м на 1 км, $\eta = 1$;		n= 1,6564		
10	Температура навколишнього середовища	T= 25			$^{\circ}\text{C}$		d= 4,9112		
11	Висота джерела викиду над рівнем землі (висота труби, з якої здійснюється викид забруднюючих речовин)	H= 15,6			M		Відстань до джерела викиду, при якому приземна концентрація досягає максимального значення при несприятливих метеорологічних умовах		
12	Діаметр устя джерела викиду (труби)	D= 0,8			M		x= 76,614		
13	Витрата газоповітряної суміші (швидкість викиду пило-газової суміші з труби)	V= 0,6			$\text{м}^3/\text{с}$				
14	Температура газоповітряної суміші, що викидається	T_г= 91,6			$^{\circ}\text{C}$				

	A	B	C	D
15				
16	Забруднюючі речовини:			
17				
18		SO₂	г/с	
19	Маса (M) речовини-забруднювача (г), що викидаються в атмосферу за одиницю часу (с)	CO	0,0656	г/с
20		NO₂	0,0494	г/с
21		Пил	0,0844	г/с
22		NO	г/с	
23		M=	0,1994	
24				
25	Проміжні розрахунки:			
26	Середня швидкість виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду	ω₀=	1,1937	
27		f=	0,0703	
28		v=	0,8894	м/с
29		v¹=	0,0796	
30		f_e=	0,4031	
31				

7. У чарунках **H7:H11** виконайте розрахунки необхідних показників:
- у чарунку **H7** введіть формулу для обчислення різниці між температурою газоповітряної суміші та температурою навколишнього середовища $\Delta T = T_a - \theta$;
 - у чарунки **H8, H9** введіть формули (12.8), (12.9) для обчислення коефіцієнтів m і n , що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду;
 - у чарунку **H10** введіть формулу (12.11) для обчислення безрозмірного коефіцієнта d ;
 - у чарунку **H11** введіть формулу (12.10) для обчислення відстані до джерела викиду, при якому приземна концентрація досягає максимального значення при несприятливих метеорологічних умовах.
8. У чарунку **H18** уведіть формулу (12.2) для розрахунку шуканої **максимальної приземної концентрації C_m (мг/м³)** при викиді першої газоповітряної суміші з одиничного точкового джерела з круглим устям. При записі формули задайте абсолютні посилання на всі чарунки, крім чарунки **C18** (оскільки за умовою маса **SO₂** рівна 0, то, відповідно значення C_m від цього забруднювача теж буде рівним 0).

	E	F	G	H	I	J
15						
16		Максимальна концентрація забруднюючих речовин:				
17	ГДК, мг/м³					C_m, од.ГДК
18	0,5	Максимальне значення приземної концентрації забруднюючої речовини C	C_{m1} =	0 мг/м³		0,0000
19	5		C_{m2} =	0,0312 мг/м³		0,0062
20	0,085		C_{m3} =	0,0235 мг/м³		0,2765
21	0,5		C_{m4} =	0,0402 мг/м³		0,0803
22	0,4		C_{m5} =	0 мг/м³		0,0000
23			C =	0,0949		
24						

- Скопіюйте формулу максимальної приземної концентрації від викидів першого забруднювача, на сусідні чарунки для розрахунку максимальної приземної концентрації від викидів інших забруднюючих речовин (із чарунки **H18** скопіюйте формули у чарунки **H19:H23**).
- У чарунках діапазону **J18:J22** розрахуйте максимальні концентрації забруднюючих речовин в одиницях по відношенню до їх ГДК.
- Створіть три копії аркуша *Підприємство_I*, яким надайте назви *Підприємство_II*, *Підприємство_III* та *Місто*
- На аркуші *Підприємство_II* змініть вхідні дані і виконайте розрахунки забруднення, внаслідок роботи підприємства II.
На аркуші *Підприємство_III* змініть вхідні дані і виконайте розрахунки забруднення, внаслідок роботи підприємства III.
- Проаналізуйте результат. На будь-якому аркуші підприємства у будь-які чарунки запишіть висновок – за яких умов зменшується забруднення атмосфери в районі джерела викиду та концентрації забруднюючих речовин у приземному шарі атмосфери. Наприклад, оформіть висновок так:

	A	B	C	D
32				
33	Висновки:			
34	<i>Забруднення повітря у районі джерел</i>			
35	зменшується	при		<i>висоти викидів (труби) H</i>
36	<i>Концентрація домішок у приземному шарі атмосфери</i>			
37	зменшується	при		<i>кількості викидів речовини M</i>
38	зменшується	при		<i>середньої швидкості w₀ та витрат V виходу суміші</i>
39	зменшується	при		<i>різниці температур T_г газоповітряної суміші та повітря</i>

Якщо при прийнятті рішення виникають труднощі, - змінюйте почергово значення відповідних вхідних величин у чарунках стовпчика **C** і слідкуйте, як змінюватимуться показники концентрації забруднювачів у чарунках **H19:H23** (не забувайте після введення кожного нового значення відмінити останню дію!).

14. На аркуші *Misto* підрахуйте зведені показники забруднення по місту в розрізі кожної шкідливої речовини. Для цього:

- вхідні дані змінювати не потрібно (вони нам на даному етапі розрахунків не потрібні і рядки 29-30, 26-27, 5-14 можна за бажанням взагалі вилучити);
- вилучте вміст чарунок **C18:C22** , **C22** та **H18:H22**;
- у чарунці **C18** обчисліть сумарну масу діоксиду сірки, що викидається в атмосферу з усіх підприємств, виконуючи посилання на три аркуші
=СУММ('Підприємство I: Підприємство III'!C18)
- скопіюйте формулу із чарунки **C18** на сусідній діапазон **C19:C22**;
- у чарунці **H18** обчисліть сумарну максимальну концентрацію діоксиду сірки в приземному шарі від усіх підприємств, виконуючи посилання на три аркуші
=СУММ('Підприємство I: Підприємство III'!H18)
- скопіюйте формулу із чарунки **H18** на сусідній діапазон **H19:H22**;
- у чарунці **C22** обчисліть середньозважену небезпечну швидкість вітру по місту, виконуючи посилання на три аркуші
=СРЗНАЧ('Підприємство I: Підприємство III'!C22)

15. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_12.xlsx*. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері всі аркуші документу *laboratorna_12.xlsx*, що отримані після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. За якою формулою здійснюється прогноз максимальної концентрації шкідливої домішки від окремого джерела за дифузійною моделлю?
2. Основна суть та призначення методики ОНД-86.
3. Які вхідні дані мають бути відомі для моделювання забруднення атмосфери за методикою ОНД-86?
4. Формула для розрахунку середньої швидкості виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду.
5. Чи враховується температура ЗР, що викидається в атмосферу з джерела, при розрахунку максимальної приземної концентрації при несприятливих умовах?
6. Формула для розрахунку відстані до джерела викиду, при якому спостерігається максимальна приземна концентрація при несприятливих метеорологічних умовах.
7. За рахунок зміни яких факторів можна досягти зменшення максимальної концентрації ЗР?

Список рекомендованої літератури:

1. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
2. Гладкий А. В. Основи математичного моделювання в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
3. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
4. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
5. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. [Навч.посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
6. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 7. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ЕКОЛОГІЇ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 13

Тема: Постановка задач популяційної екології та підходи до їх розв'язання. Побудова і дослідження моделей росту

Мета: Опанувати роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем, ознайомитися з основними підходами до складання математичних моделей росту

Завдання:

1. Визначити роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем.
2. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій за експоненціальним законом.
3. Дослідити логістичне рівняння зростання чисельності популяцій.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер, зі встановленим пакетом прикладних програм Office та виходом в Internet

Короткий теоретичний коментар

Динамічні моделі – це моделі, що зображають динаміку системи. Розрізняють такі різновиди динаміки: функціонування, зростання, розвиток.

Моделі функціонування відображають процеси, що відбуваються в системі і спрямовані на виконання системою своїх функцій і досягнення цілей.

Моделі зростання і розвитку системи дозволяють простежити розвиток системи упродовж деякого більш тривалого проміжку часу. Необхідно зауважити, що процеси зростання і розвитку не є тотожними. Зростання систем, як правило, пов'язане із збільшенням їх розмірів, включенням у систему деяких об'єктів із зовнішнього середовища, матеріальних та інших ресурсів.

Динаміку систем вивчають із використанням математико-множинних методів, що базуються на положеннях теорії множин. Динаміка системи описується як перехід з одного стану в інший. Сукупність можливих станів системи називають множиною станів. Системи можуть мати дискретні стани (система може перебувати лише в певних, дозволених станах) або неперервні стани (система переходить послідовно з одного стану в інший через

Динаміку системи розглядають як послідовний перехід системи з одного стану в інший. Теоретико-множинні методи вивчення динаміки систем спрямовані на вивчення керованості системи, стійкості, надійності функціонування, вивчення роботи в даний момент часу і прогнозу розвитку системи в майбутньому. На основі теоретичних розрахунків встановлено, що системи можуть бути безсмертними чи смертними. Для того щоб система існувала вічно, була безсмертною, необхідно, щоб вона розширювалась. Встановлено теорему, згідно з якою щоб система була вічною, потрібно, щоб зростання елементів у системі не відставало від логарифмічного закону.

У загальному випадку математична модель, побудована за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, має такий вигляд:

$c_1(t), c_2(t), c_3(t), \dots, c_n(t)$ – невідомі функції часу, що описують показники (характеристики) компонентів екологічної системи;

f_j – функції, які залежать від зовнішніх і внутрішніх параметрів екосистеми ($j=1, 2, \dots, n$).

Завдання моделювання полягає в тому, щоб розв'язати систему диференціальних рівнянь 13.1, тобто знайти невідомі функції:

$$c_1=F_1(t), c_2=F_2(t), c_3=F_3(t), \dots, c_n=F_n(t), \quad (13.2)$$

які б задовольняли відповідні диференціальні рівняння і додаткові (початкові) умови:

$$c_1(t_0)=c_{10}, c_2(t_0)=c_{20}, \dots, c_n(t_0)=c_{n0} \quad (13.3)$$

Функції (13.2) називають розв'язками, або інтегралами диференціальних рівнянь, а їх графіки, побудовані в $(n+1)$ просторі, називають інтегральними кривими.

Одним із основних об'єктів вивчення у екології та біології, поведінку яких можна досліджувати за допомогою найпростіших математичних моделей, є *популяція* – група організмів одного виду, що впродовж багатьох поколінь займає певний простір і може функціонувати (розмножуватись і розвиватись) за певних умов навколишнього середовища.

Під щільністю популяції розуміють кількість особин (організмів) на одиницю площі або об'єму, наприклад, 500 дерев на 1 га, 200 кг риби на 1 га або 5 млн діатомей на 1 м^3 . Якщо знехтувати віковими, статевими і генетичними відмінностями, то щільність певного виду досліджуваних організмів може бути повністю математично описана однією змінною величиною – кількістю особин на одиницю площі. Чисельність (щільність) цих популяцій з часом зазнає змін. Навіть якщо популяцію та екосистему вважають незмінними, щільність, народжуваність, рівень виживання (смертність), вікова структура, інтенсивність росту та інші характеристики, як правило, змінюються залежно від сезону, клімату, інших факторів навколишнього середовища.

Екологів найбільше цікавить швидкість змінювання чисельності популяції або її певної вікової групи.

За найсприятливіших умов для розмноження популяції і відсутності лімітуючи факторів швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (13.4)$$

що виражає **закон прямої пропорційної залежності чи пропорційної швидкості розмноження** від кількості особин (організмів) цієї популяції. Причому параметр r у рівнянні називають коефіцієнтом швидкості розмноження популяції.

Рівняння 7.4 вперше у 1802 році сформував Томас Мальтус, вважаючи його універсальним законом не лише для всієї природи, а й для суспільства.

Більшість біологічних процесів за сприятливих і стабільних природних умов дуже добре описується **логістичним рівнянням**:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2 \quad (13.5)$$

причому максимальний рівень розмноження популяції визначається ємністю середовища K , а швидкість розмноження (крутість сигмоподібної кривої і положення точки перегину M_0) залежить від величини $r = b - d$.

Точка перегину M_0 має координати $t_p = \frac{1}{r} \ln \frac{K - N_0}{N_0}$, $N(t_p) = \frac{1}{2} K$.

Логістичне рівняння запропонував П. Ферхюльст у 1838 р. Майже через 100 років це рівняння «переформулювали» Р. Перл і Л. Рід. Рівняння Ферхюльста–Перла враховує т. зв. ефект самоотруєння популяції, або внутріпопуляційну боротьбу (конкуренцію), яку описують членом $-r \frac{N^2}{K}$.

Розв'язок логістичного рівняння має **дві важливі властивості**:

- 1) при малих значеннях чисельності (або біомаси) популяції зростання відбувається за експоненціальним законом, як і у рівнянні (13.4);
- 2) з часом чисельність популяції асимптотично наближається до деякого постійного числа K (ємності середовища), перевищити яке чисельність популяції не може (установлюється стійкий стаціонарний (рівноважний) режим).

Порядок і методика виконання завдань

1. Визначити роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем.

Метод теорії диференціальних рівнянь є найефективнішим методом побудови математичних моделей, що описують динаміку екосистем, враховуючи взаємодію як між окремими елементами екосистеми, так і між елементами екосистеми і зовнішніми факторами середовища, в якому функціонує кожен елемент екосистеми. Ці рівняння можуть описувати різні види динаміки біологічних і екологічних процесів, на їх основі будуються математичні моделі розвитку окремих популяцій і біоценозів.

2. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій за експоненціальним законом.

За найсприятливіших умов для розмноження популяції і відсутності лімітуючи факторів швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Відповідно, експоненціальна функція, яка є розв'язком цього звичайного диференціального рівняння першого порядку, що описує розмноження мікроорганізмів до моменту виснаження культурального середовища, має вигляд:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)} \quad (13.6)$$

де N_0 – чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$

Такий експоненціальний закон росту вважається універсальним законом не лише для всієї природи, а й для суспільства. Дійсно, багато явищ природи, наприклад, «цвітіння» води у водоймищах, спалах (вибух) чисельності шкідників, розмноження бактерій та інших мікроорганізмів супроводжується зростанням чисельності організмів згідно з експоненціальним законом. За неконтрольованих сприятливих умов потомство однієї пари мух через кілька років важило б більше, ніж земна куля.

Експоненціальний характер властивий багатьом іншим процесам і явищам природи, зокрема поглинанню світла, мономолекулярним хімічним реакціям, зростанню складних відсотків та ін. Проте сприятливі для розмноження умови не можуть довго існувати з огляду на вплив навколишнього середовища, присутність ворогів (хижаків) та інших несприятливих для життя популяції факторів. Взаємодія популяції з іншими та вплив зовнішнього середовища значно зменшують швидкість зростання її чисельності і змінюють закономірності розмноження цієї популяції (угруповання).

3. Дослідити логістичне рівняння зростання чисельності популяцій.

Після інтенсивного зростання чисельність популяції може стабілізуватися на деякому стійкому рівні, тому доцільно описувати його логістичним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2 \quad (13.7)$$

яке часто записують так:

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{K - N}{K} \quad (13.8)$$

де r – питома швидкість розмноження;

$K = N_{max}$ – максимально можлива чисельність популяції (угруповання).

На відміну від лінійного диференціального рівняння (13.4) рівняння (13.8) є нелінійним диференціальним, а нелінійні залежності краще описують реальні об'єкти. Однак нелінійні моделі складніші, і тому їх аналіз має певні, деколи досить значні, труднощі.

Розділивши змінні в рівнянні (13.8), одержимо рівняння:

$$\frac{KdN}{N(K-N)} = rN \quad (13.9)$$

Після певних попередніх розрахунків і інтегрування отримаємо:

$$\frac{N}{K-N} = ae^{rt} \quad (13.10)$$

Якщо відомо, що при $t = 0$ кількість особин була $N = N_0$, то параметр a становитиме:

$$a = \frac{N_0}{K - N_0} \quad (13.11)$$

Шукана функція N зростання чисельності популяції матиме вигляд:

$$N(t) = \frac{aK}{a + e^{-rt}}, a = \frac{N_0}{K - N_0} (0 < a < \infty) \quad (13.12)$$

4. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_13.xlsx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Вправа 1. Визначити роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем

1. Пригадайте основні підходи, математичне підґрунтя до моделювання динаміки популяцій.
2. Завантажте програму-браузер, встановлену на Вашому ПК.
3. У всесвітній мережі Інтернет відшукайте інформацію *Про суть динамічних моделей*.
4. Відкрийте дві-три сторінки, де розкривається поняття *динамічних моделей* та ознайомтеся з наведеною інформацією.
5. Визначте, де найбільш вдало, на Вашу думку, розкрито дане питання.
6. Знайдену інформацію (не більше двох сторінок) збережіть у новому файлі текстового процесора Microsoft Word, якому надайте назву *laboratorna_13.docx* і збережіть у Вашій папці диска D.

7. Знайдіть у мережі Інтернет одну з існуючих задач моделювання, де враховано фактор часу, що можуть мати місце в біології та екології.
8. Збережіть знайдену інформацію з нової сторінки файлу *laboratorna_13.docx*.
9. Завершіть роботу з програмою-браузером.
10. Закрийте всі відкриті файли.

Вправа 2. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій за експоненціальним законом

1. Пригадайте, у яких випадках ріст чисельності популяцій моделюється диференціальним рівнянням $\frac{dN}{dt} = rN$
2. Для ознайомлення з експоненціальним законом росту чисельності популяції розв'яжіть приклад 1:

Приклад 1.

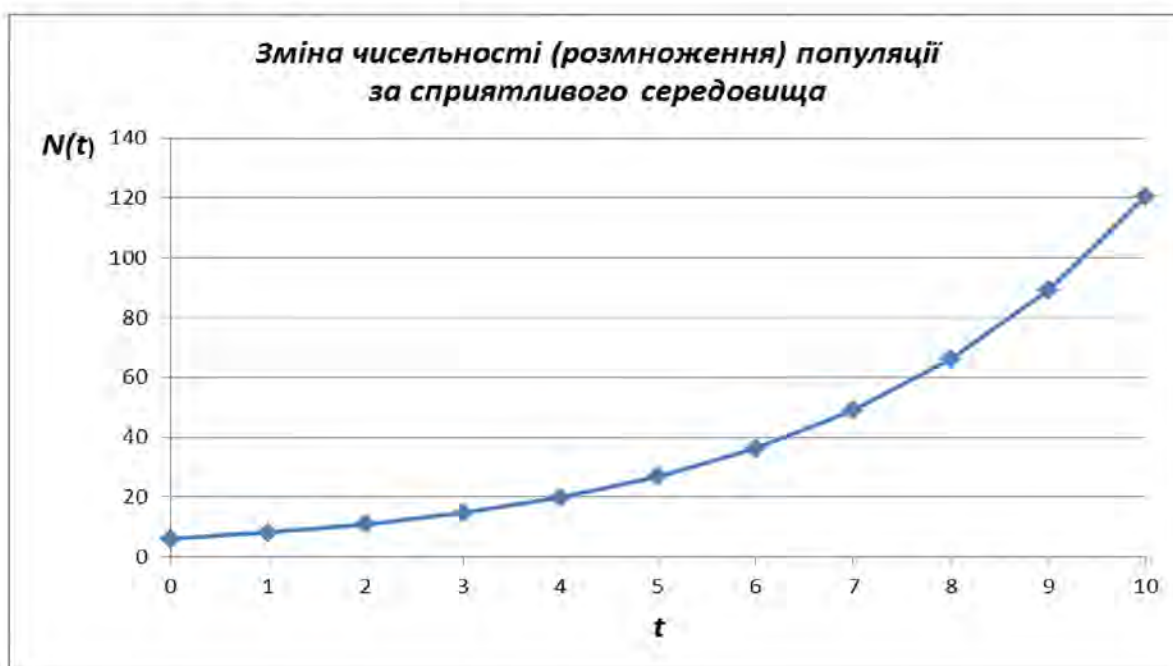
Дослідіть експоненціальну функцію для життєдіяльності мікроорганізмів за заданими параметрами: їх розмноження (при $r > 0$) та їх загибель (при $r < 0$).

Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 = 6$	$N_0 = 6$
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r = 0,3$	$r = -0,3$
Часовий діапазон	$t = \overline{0,10}$	$t = \overline{0,10}$

3. Для розв'язання **прикладу 1** завантажте табличний процесор Microsoft Excel і створіть новий документ.
4. Надайте аркушу *Лист 1* назву **Приклад_1**.
5. На аркуші *Приклад_1* в окремі чарунки діапазону **A3:C5** введіть вхідні дані до **прикладу 1** та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком →
6. У чарунки діапазону **B9:B19** введіть моменти часу від 0 до 10, користуючись засобом автозаповнення.

Експоненціальний закон зміни чисельності популяції		
Вихідні дані:		
Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 =$	6
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r =$	0,3
Розрахунки		
	t	N(t)
	0	6
	1	8
	2	11
	3	15
	4	20
	5	27
	6	36
	7	49
	8	66
	9	89
	10	121

7. Для розрахунку чисельності мікроорганізмів до моменту виснаження культурального середовища у чарунку **C9** введіть експоненціальну функцію (13.6), задавши абсолютні посилання на відповідні чарунки (в Excel для розрахунку експоненти використовується вбудована функція **=EXP()**).
8. Скопіюйте формулу з чарунки **C9** на сусідній діапазон чарунок **C10:C19**, використовуючи засіб автозаповнення. Округліть отримані результати в діапазоні **C9:C19** до цілого числа.
9. Прослідкуйте зміну чисельності популяцій на графіку (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C9:C19**).
10. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком
 - за командою **Выбрать данные** стрічки **Конструктор** у полі Підписи горизонтальної осі натисніть **Изменить** та виділіть діапазон **B9:B19**
 - за командами стрічки **Макет** додайте назву діаграми та назву осей;
 - виділіть вісь x і за командою **Формат...** її контекстного меню задайте опцію **Положение оси по делениям**.



11. Проаналізуйте результат і збережіть створений документ у Вашій папці диску D: з власним іменем *laboratorna_13.xlsx*.
12. Створіть копію аркуша *Приклад_1*.
13. На аркуші *Приклад_1(1)* дослідіть функцію загибелі популяції, коли швидкість розмноження популяції менше 0. Для цього введіть у чарунку **C5** коефіцієнт $r = -0.3$.
14. Змініть назву діаграми на аркуші *Приклад_1(1)*.
15. Проаналізуйте результат і збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_13.xlsx*.

Вправа 3. Дослідити логістичне рівняння зростання чисельності популяцій

1. Пригадайте, у яких випадках ріст чисельності популяцій моделюється логістичним диференціальним рівнянням $\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2$
2. Для ознайомлення з логістичним законом зміни чисельності популяції розв'яжіть приклад 2:

Приклад 2.

Дослідіть логістичне рівняння, що виражає зростання чисельності популяцій за заданими параметрами:

Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 = 4$
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r = 0,4$
Максимально можлива чисельність популяції (угруповання) $K = N_{max}$	$K = 50$
Часовий діапазон	$t = 0,20$

3. Для розв'язання **прикладу 2** у файлі *laboratorna_7.xlsx* додайте новий аркуш, якому надайте назву **Приклад_2**.
4. На аркуші **Приклад_2** в окремі чарунки діапазону **A3:C6** введіть вхідні дані до **прикладу 2** та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком
5. У чарунку **C9** введіть формулу (13.11) для обчислення параметра **a** (в Excel для розрахунку натурального логарифму використовується вбудована функція **=LN()**).
6. У чарунки діапазону **B12:B32** введіть моменти часу від 0 до 20, користуючись засобом автозаповнення.
7. Для розрахунку чисельності популяції у чарунку **C12** введіть логістичну функцію (13.12), задавши абсолютні посилання на відповідні чарунки.

Логістичне рівняння зміни чисельності популяції		
Вихідні дані:		
Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 =$	4
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r =$	0,4
Максимально можлива чисельність популяції (угруповання) $K = N_{max}$	$K =$	50
Розрахунки		
	$a =$	0,09
	t	N(t)
	0	4
	1	6
	2	8
	3	11
	4	15
	5	20
	6	24
	7	29
	8	34
	9	38
	10	41
	11	44
	12	46
	13	47
	14	48
	15	49
	16	49
	17	49
	18	50
	19	50
	20	50
	6	25

8. Скопіюйте формулу з чарунки **C12** на сусідній діапазон чарунок **C13:C32**, використовуючи засіб автозаповнення. Округліть отримані результати в діапазоні **C12:C32** до цілого числа.
9. Прослідкуйте зміну чисельності популяцій на графіку (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C12:C32**).
10. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком.
11. Зверніть увагу, що на малих значеннях проміжку часу зростання відбувається за експоненціальним законом, а з часом чисельність популяції наближається до деякого постійного числа (ємності середовища) $K=N_{max}$.



12. У чарунках **B34**, **C34** розрахуйте координати точки перегину за формулами

$$t_p = \frac{1}{r} \ln \frac{K - N_0}{N_0}, \quad N(t_p) = \frac{1}{2} K$$

13. Із використанням авто фігур (Надписів, Ліній), намалюйте на графіку асимптоту, її координати та точку перегину.
14. Спробуйте змінити значення r – швидкість розмноження популяції. Проаналізуйте, як зміниться крутість сигмоподібної кривої і положення точки перегину M_0 (наскільки швидше буде досягнуто максимальне значення чисельності популяції).
15. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_13.xlsx* та завершіть роботу з табличним процесором.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері всі аркуші документів *laboratorna_13.xlsx* та *laboratorna_13.docx*, що отримані після виконання завдань.

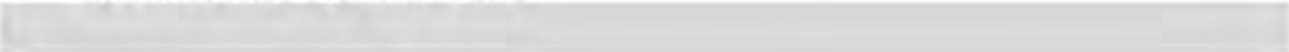
Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію, маючи електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Наведіть визначення динамічних моделей.
2. Що виділяє динамічні моделі від інших моделей?
3. Який математичний апарат використовується для розв'язання задач, що враховують фактор часу?
4. Назвіть типи задач, що можуть мати місце в екології та біології і моделюються на основі диференціальних рівнянь.
5. Який математичний апарат лежить в основі моделей щодо розрахунку чисельності популяцій?
6. Вкажіть експоненційний закон росту до моменту виснаження культурального середовища.
7. Наведіть загальне логістичне диференціальне рівняння розмноження популяцій.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципы моделирования та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математического моделирования в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.

5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
 6. Яскевець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Яскевець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова. – К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.
- 

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 14

Тема: Моделювання динаміки популяцій

Мета: Ознайомитися та дослідити математичні моделі популяційної динаміки та біологічних процесів

Завдання:

1. Дослідити математичні моделі зміни чисельності популяцій.
2. Ознайомитися з розробленими математичними моделями популяційної динаміки та біологічних процесів.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер, зі встановленим пакетом прикладних програм Office та виходом в Internet

Короткий теоретичний коментар

Одним із основних об'єктів вивчення у екології та біології, поведінку яких можна досліджувати за допомогою найпростіших математичних моделей, є *популяція* – група організмів одного виду, що впродовж багатьох поколінь займає певний простір і може функціонувати (розмножуватись і розвиватись) за певних умов навколишнього середовища. Якщо знехтувати віковими, статевими і генетичними відмінностями, то щільність певного виду досліджуваних організмів може бути повністю математично описана однією змінною величиною – кількістю особин на одиницю площі. Чисельність (щільність) цих популяцій з часом зазнає змін. Навіть якщо популяцію та екосистему вважають незмінними, щільність, народжуваність, рівень виживання (смертність), вікова структура, інтенсивність росту та інші характеристики, як правило, змінюються залежно від сезону, клімату, інших факторів навколишнього середовища.

Екологів найбільше цікавить швидкість змінювання чисельності популяції або її певної вікової групи.

За найсприятливіших умов для розмноження популяції і відсутності лімітуючи факторів швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

що виражає закон прямої пропорційної залежності чи пропорційної швидкості розмноження від кількості особин (організмів) цієї популяції.

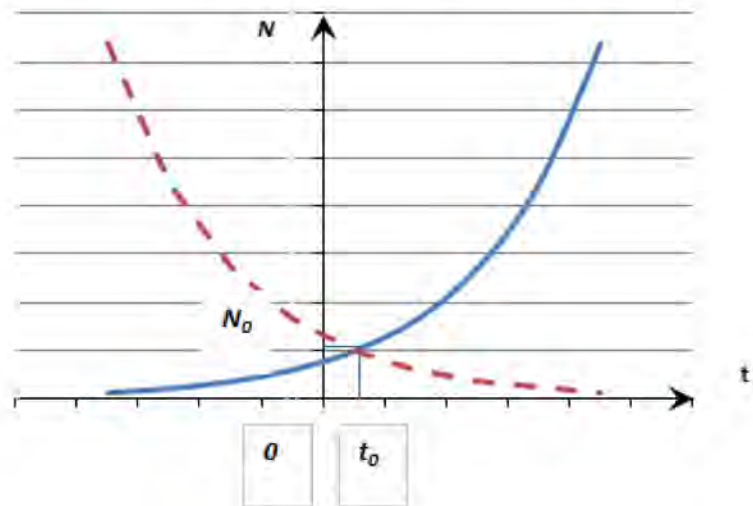
Відповідно, розв'язком цього звичайного диференціального рівняння першого порядку, що описує розмноження мікроорганізмів до моменту виснаження культурального середовища, є експоненціальна функція виду:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)}$$

де N_0 – чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$

Рис. 14.1 Графік зростання популяції

Такий експоненціальний закон росту вважається універсальним законом не лише для всієї природи, а й для суспільства.



Після інтенсивного зростання чисельність популяції може стабілізуватися на деякому стійкому рівні, тому доцільно описувати його т. зв. *логістичним рівнянням*. Більшість біологічних процесів за сприятливих і стабільних природних умов дуже добре описується саме таким рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2$$

Шукана функція N зростання чисельності популяції матиме вигляд:

$$N(t) = \frac{aK}{a + e^{-at}}, \quad a = \frac{N_0}{K - N_0} \quad (0 < a < \infty)$$

Розв'язок логістичного рівняння має **дві важливі властивості**:

- 1) при малих значеннях чисельності (або біомаси) популяції зростання відбувається за експоненціальним законом, як і у рівнянні (13.4);
- 2) з часом чисельність популяції асимптотично наближається до деякого постійного числа K (ємності середовища), перевищити яке чисельність популяції не може (установлюється стійкий стаціонарний (рівноважний) режим).

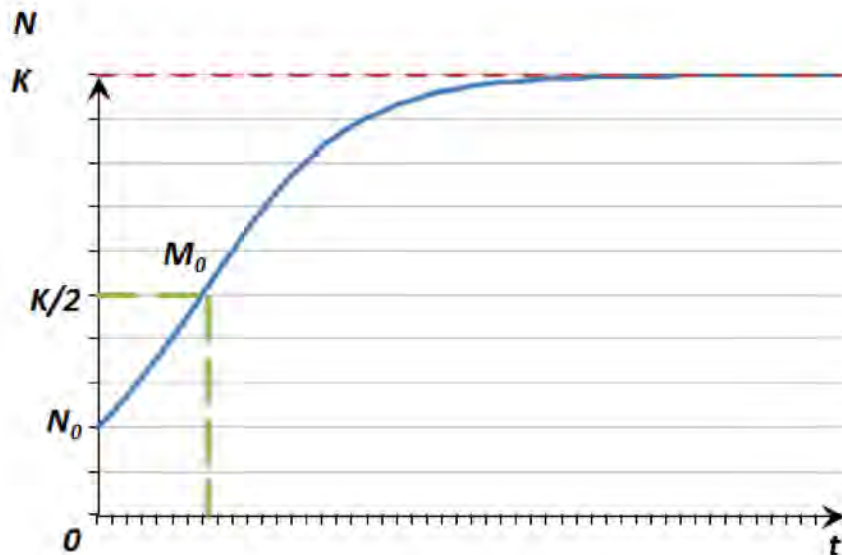


Рис. 14.2 Логістична крива

Якщо розвиток (розмноження) однієї популяції можна описати експоненціальним або логістичним рівняннями, тобто одним з рівнянь:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad \frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2$$

то вплив іншої популяції описують ще одним додатковим членом, який змінює розвиток першої популяції. Вигляд цього члена рівняння залежить від виду відносин між популяціями.

В екології при побудові сучасних моделей біологічних угруповань (біоценозів) різних видів організмів широко використовують таку класифікацію відносин між видами:

- 1) *хижацтво* (+, -): один вид («хижак») пригнічує розвиток іншого («жертви»), а «жертва» прискорює розвиток «хижака»;
- 2) *конкуренція* (-, -): кожен вид має пригнічуючий (негативний) вплив на розвиток іншого, хоча існує і внутривидова конкуренція;
- 3) *симбіоз* (+, +) або *коменсалізм* (+, 0): кожен з видів прискорює розвиток іншого або один вид розвивається, не завдаючи іншому шкоди, але й не приносячи користі.

Нехай маємо дві популяції чисельністю N_1 і N_2 , які взаємодіють між собою. Розмноження кожної з них опишемо логістичним рівнянням, а їхню взаємодію – членом, пропорційним добутку $N_1 N_2$.

Тоді динаміку популяцій у загальному можна описати так:

- у разі взаємовідносин типу «хижацтво»

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2;$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - \gamma_2 N_2 N_1.$$

- при взаємовідносинах типу «конкуренція»

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 - \gamma_1 N_1 N_2;$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 - \gamma_2 N_2 N_1;$$

- за «симбіозу»

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - \frac{r_1}{K_1} N_1^2 + \gamma_1 N_1 N_2;$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{K_2} N_2^2 + \gamma_2 N_2 N_1.$$

Порядок і методика виконання завдань

1. Дослідити математичні моделі зміни чисельності популяцій.

Розглянемо динаміку розвитку популяції організмів, чисельність якої N_{n+1} у момент часу t_{n+1} змінюється за рахунок народження нових організмів “стрибком”, тобто за дуже короткий час у порівнянні з проміжком часу $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ між двома послідовними періодами народження нових організмів. Якщо приріст чисельності (розміру) популяції відбувається пропорційно до наявного її розміру N_n у попередній момент часу t_n , а зменшення – пропорційно до N_n^2 через внутрішньовидову конкуренцію за обмежений ресурс виживання, то динаміка розвитку популяції відображується дискретною моделлю

$$N_{n+1} = b \cdot N_n - d \cdot N_n^2 = b \cdot N_n \cdot \left(1 - \frac{d}{b} N_n\right) \quad (14.1)$$

де b є коефіцієнт розмноження, а d - коефіцієнт конкуренції.

Якщо ввести безрозмірну чисельність (розмір) популяції $a_n = N_n d/b$, то рівняння (14.1) набуває вигляду

$$a_{n+1} = b \cdot a_n \cdot \left(1 - a_n\right) \quad (14.2)$$

Рівняння (14.2) разом з початковою умовою

$$a_n \Big|_{n=0} = a_0 \quad (14.3)$$

де a_0 є початковий розмір популяції, складають дискретну модель динаміки чисельності популяції організмів з внутрішньовидовою конкуренцією.

Стаціонарного стану популяція досягає, коли її розмір a стало повторюється $a_{n+1} = a_n = a$ з кожним циклом репродукції нових організмів. Підстановка a у рівняння (14.2) замість a_{n+1} і a_n дозволяє отримати

квадратичне рівняння відносно стаціонарного розміру а популяції, рішення якого має вигляд:

$$a = \frac{1 - b}{b} \quad (14.4)$$

Модель (14.2) запропонував Р. Мей у 1976 році для демонстрації дуже складної динаміки, що може бути притаманною навіть простим системам довкілля.

2. Ознайомитися з розробленими математичними моделями популяційної динаміки та біологічних процесів.

Математичні моделі знаходять своє широке застосування в біології. В їх основі, окрім вищезгаданих експоненціальних, лежать дробово-лінійні, тригонометричні, степеневі та інші залежності. Наприклад, дробово-раціональна функція описує залежність між кількістю їжі та швидкістю її споживання (рівняння Міхаеліса-Ментен).

Вагу риби можна обчислювати як функцію від її довжини (кубічна залежність, описана Ф. Барановим):

$$W(L) = b \cdot L^3 \quad (14.5)$$

Тригонометричні функції застосовують для моделювання періодичних процесів, що спостерігаються в природі, наприклад, процес зміни температури протягом доби

$$T(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - \frac{\pi}{2}\right) + 20 \quad (14.6)$$

Рівняння Міхаелеса-Ментен, що виражає швидкість (V) поглинання субстрату мікроорганізмами в залежності від концентрації субстрату (S) записується у вигляді:

$$V(S) = \frac{V_{max} \cdot S}{K + S} \quad (14.7)$$

де V_{max} – максимальна швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами;

V – швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами;

K – константа напівнасичення (концентрація, за якої швидкість поглинання субстрату досягає половини V);

S – концентрація субстрату.

3. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_14.xlsx*.

**Завдання для практичного виконання,
порядок і рекомендації щодо їх виконання**

Вправа 1. Дослідити математичні моделі зміни чисельності популяцій

1. Пригадайте відомі Вам математичні моделі популяційної динаміки та біологічних процесів.
2. Ознайомтеся з моделлю динаміки популяцій, запропонованої Р. Мей, розв'язавши приклад 1:

Приклад 1.

Здійсніть необхідні розрахунки, що ілюструють особливості моделі динаміки популяцій, запропонованої Р. Мей.

Дослідіть зміну розміру певної популяції, початковий розмір якої 0,2 ум.од, якщо коефіцієнт розмноження знаходиться у межах від 0 до 3; від 3 до 3,5. Наведіть графічне відображення процесу зміни розміру популяції при різних величинах коефіцієнта розмноження.

3. Для розв'язання *прикладу 1* завантажте табличний процесор Microsoft Excel.
4. У новому документі надайте Лист 1 назву *Приклад_1*.
5. На аркуші *Приклад_1* в окремі чарунки діапазону **A3:E5** введіть вхідні дані до *прикладу 1* (значення коефіцієнта розмноження $b=0,5$; $b=1,5$; $b=2,5$ та початковий розмір популяції $a_0=0,2$) та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком (рис. 14.3).
6. У чарунки діапазону **A6:A25** введіть моменти часу від 0 до 20, а в чарунки діапазону **B6:B25** введіть позначення чисельності популяції у відповідний момент часу, користуючись засобом автозаповнення.
7. Для розрахунку чисельності популяції a_1 за коефіцієнта розмноження $b=0,5$ у чарунку **C6** введіть рівняння Р. Мей (14.2), задавши абсолютні посилання на відповідну чарунку.

$$= \$C\$4 * C5 * (1 - C5)$$

	A	B	C	D	E
1	Моделювання чисельності популяції				
2	за моделлю Р. Мей				
3			$\epsilon =$	$\epsilon =$	$\epsilon =$
4	n	a_n	0,5	1,5	2,5
5	0	a_0	0,2	0,2	0,2
6	1	a_1	0,0800000	0,2400000	0,400
7	2	a_2	0,0368000	0,2736000	0,600
8	3	a_3	0,0177229	0,2981146	0,600
9	4	a_4	0,0087044	0,3138634	0,600
10	5	a_5	0,0043143	0,3230298	0,600
11	6	a_6	0,0021478	0,3280223	0,600
12	7	a_7	0,0010716	0,3306355	0,600
13	8	a_8	0,0005352	0,3319735	0,600
14	9	a_9	0,0002675	0,3326506	0,600
15	10	a_{10}	0,0001337	0,3329913	0,600
16	11	a_{11}	0,0000668	0,3331621	0,600
17	12	a_{12}	0,0000334	0,3332477	0,600
18	13	a_{13}	0,0000167	0,3332905	0,600
19	14	a_{14}	0,0000084	0,3333119	0,600
20	15	a_{15}	0,0000042	0,3333226	0,600
21	16	a_{16}	0,0000021	0,3333280	0,600
22	17	a_{17}	0,0000010	0,3333307	0,600
23	18	a_{18}	0,0000005	0,3333320	0,600
24	19	a_{19}	0,0000003	0,3333327	0,600
25	20	a_{20}	0,0000001	0,3333330	0,600

Рис. 14.3 Приклад оформлення ЕТ
для розрахунку зміни розміру популяцій у часі

- Для розрахунку чисельності популяції за коефіцієнтів розмноження $b=1,5$; $b=2,5$, скопіюйте формулу з чарунки **C6** на сусідній діапазон чарунок **D6:E6**. Змініть у отриманих формулах абсолютне посилання на відповідні чарунки

$$= \$D\$4 * D5 * (1 - D5)$$

$$= \$E\$4 * E5 * (1 - E5)$$
- Для розрахунку чисельності популяції $a_1, a_2, \dots, a_n$ в наступні 20 періодів, скопіюйте формулу з чарунки **C6** на сусідній діапазон чарунок **C7:C25**, скопіюйте формулу з чарунки **D6** на сусідній діапазон чарунок **D7: D25**, скопіюйте формулу з чарунки **E6** на сусідній діапазон чарунок **E7:E25**.
- Наведіть графічне відображення процесу зміни розміру популяції при різних величинах коефіцієнта розмноження $0 < b < 3$ (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C5:E25**).

11. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком (рис. 14.4). З графіків видно, що популяція за кілька ітерацій практично досягає сталого стаціонарного розміру $a_{n+1} = a_n = a$.

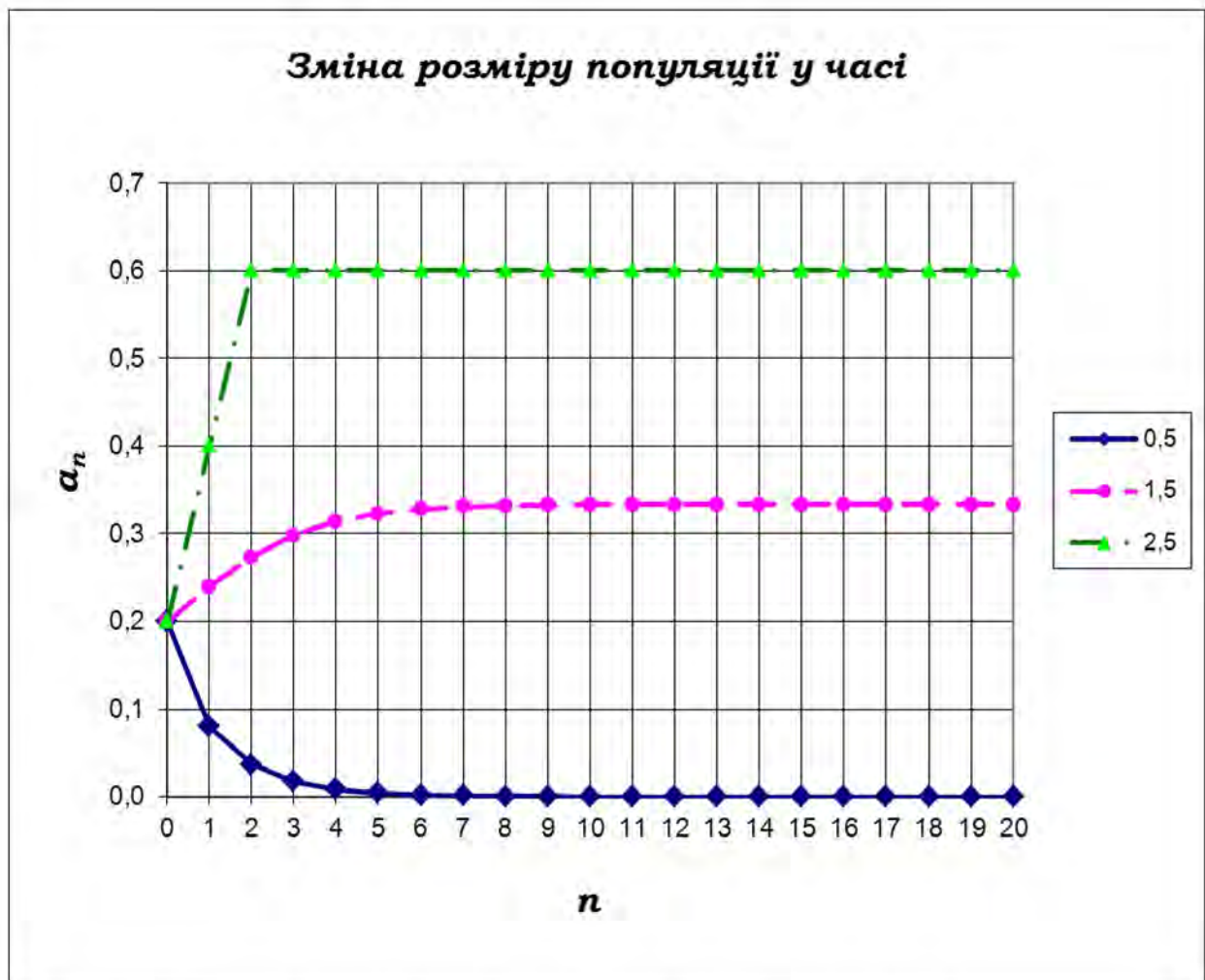


Рис. 14.4. Зміна розміру популяції у часі, якщо коефіцієнт розмноження знаходиться у межах $0 < b < 3$

12. Створіть дві копії аркуша *Приклад_1*.
13. На аркуші *Приклад_1(1)* дослідіть чисельність популяції, коли коефіцієнт розмноження знаходиться в межах $3 < b < 3,6$. Для цього введіть у чарунки **C4:E4** значення, наприклад, $b=3,2$, $b=3,46$ і $b=3,56$
14. Прослідкуйте на графіку відображення даної ситуації (рис. 14.5).

Зміна розміру популяції у часі

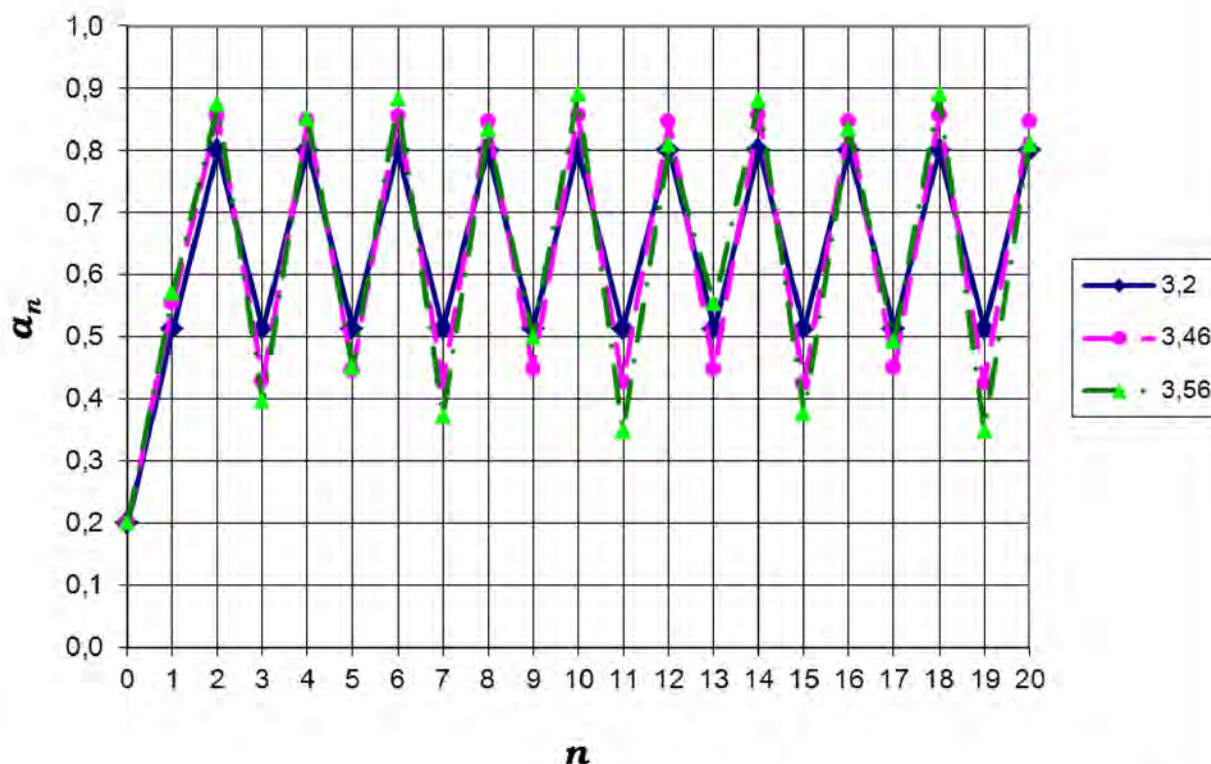


Рис. 14.5 Зміна розміру популяції у часі, якщо коефіцієнт розмноження знаходиться у межах $3 < b < 3,6$

З графіків видно, що популяція вже не досягає сталого стаціонарного розміру, а виходить на режим коливань з періодом 2, 4 і 8 (для різних b) циклів репродукції нових організмів. Подвоєння періоду коливань триває з подальшим зростанням коефіцієнта b , так що відстань між найближчими точками біфуркації стає все меншою.

- На аркуші *Приклад_1(2)* здійсніть відповідні розрахунки зміни розміру популяцій, якщо коефіцієнт розмноження $b=3,95$, а початкова кількість популяції різниться на 0,001 ум.од. для наступних 50-ти моментів часу. Для цього введіть відповідні вихідні дані в чарунки **C4:D5**, а стовпчик **E** можна вилучити або очистити.

	A	B	C	D	E
	Моделювання чисельності популяції за моделлю Р. Мей				
1					
2					
3			$e=$	$e=$	
4	n	a_n	3,95	3,95	
5	0	a_0	0,200	0,201	
6	1	a_1	0,6320000	0,6343661	

16. Наведіть відповідну графічну інтерпретацію (рис 14.4) та проаналізуйте результат

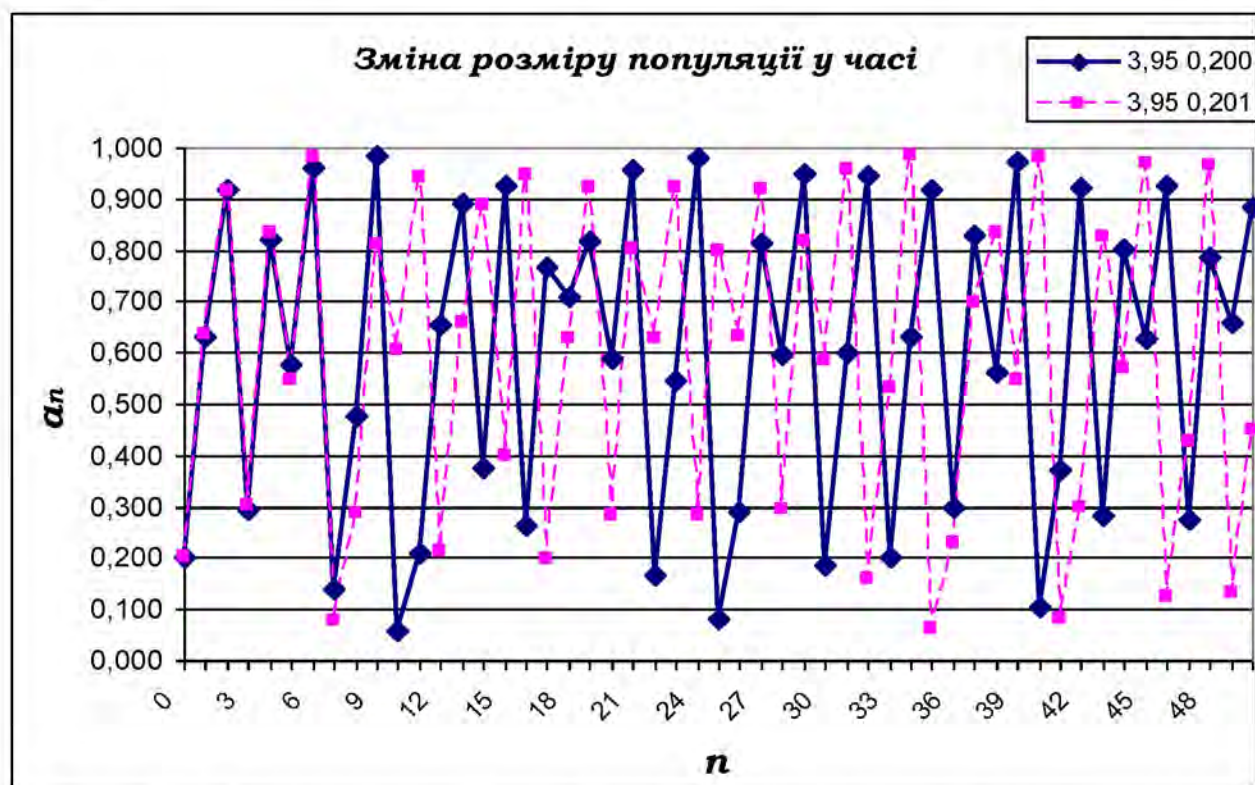


Рис. 14.4 Коливання зміни розміру популяції у режимі динамічного хаосу

Якщо коефіцієнт розмноження впритул наближається до граничної величини $b=4$, то період коливань чисельності популяції стає необмежено великим, вони щільно покривають інтервал можливих значень $0 < a_n < 1$ і чергуються у послідовності, яку можна сприйняти як послідовність випадкових чисел. Такий режим “хаотичної” зміни будь-якої величини називають динамічним хаосом.

Порівнянням графіків на рис. 14.4 можна прийти до висновку, що прогнозування чисельності популяції у режимі динамічного хаосу на тривалий період часу не є можливим через надзвичайну чутливість прогнозу до точності, з якою визначаються параметри процесу a_0 і b .

17. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: з власним іменем *laboratorna_14.xlsx*.

Вправа 2. Ознайомитися з розробленими математичними моделями популяційної динаміки та біологічних процесів

1. Для ознайомлення з рівнянням Міхаеліса-Ментен на основі дробно-раціональної функції, що може мати місце в біології, розв’яжіть Приклад 2:

Приклад 2.

Дослідіть залежність швидкості (V) поїдання субстрату мікроорганізмами від концентрації субстрату (S) за заданими параметрами:

Максимальна швидкість поїдання субстрату
мікроорганізмами

Константа напівнасичення (концентрація, за якої
швидкість поглинання субстрату досягає половини V)

Концентрація субстрату

$$V_{max} = 30$$

$$K = 0,8$$

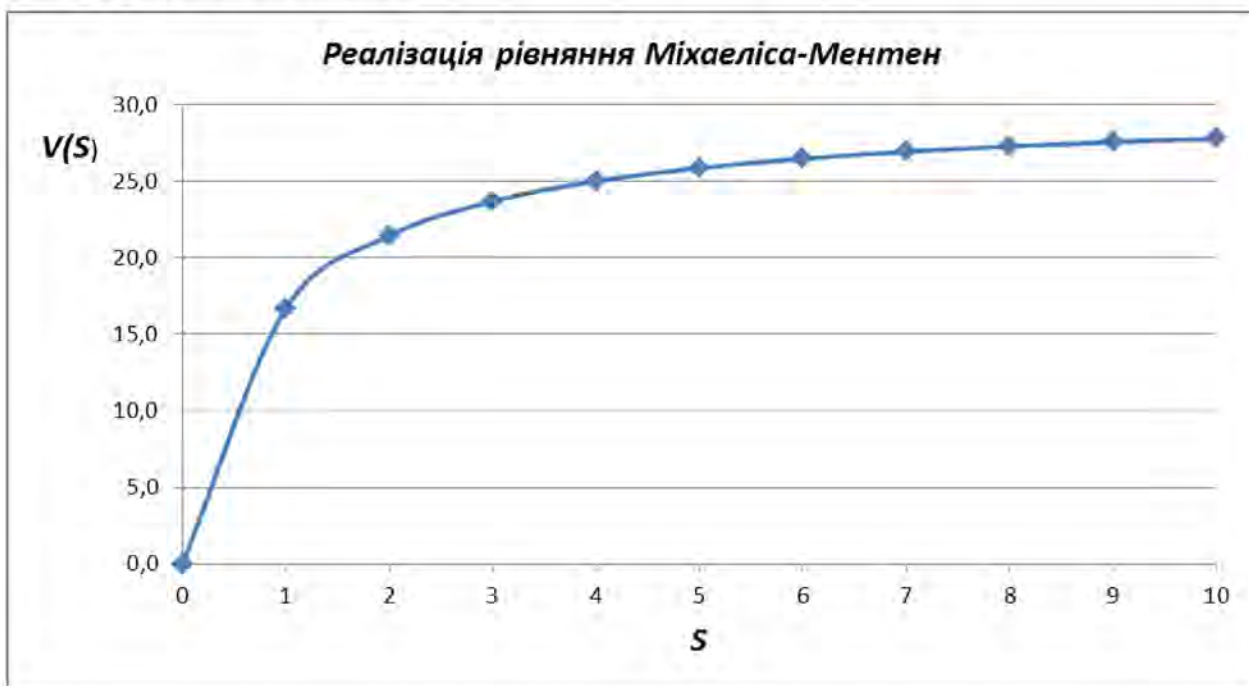
$$S = 0,10$$

- Для розв'язання **прикладу 2** у файлі *laboratorna_14.xlsx* додайте новий аркуш, якому надайте назву **Приклад_2**.
- На аркуші **Приклад_2** в окремі чарунки діапазону **A3:C5** введіть вхідні дані до **прикладу 2** та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком

	A	B	C
1	Моделювання швидкості поїдання мікроорганізмами субстрату від його кількості		
2			
3	Вихідні дані:		
4	Максимальна швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами	$V_{max} =$	30
5	Константа напівнасичення (концентрація, за якої швидкість поглинання субстрату досягає половини V)	$K =$	0,8
6			
7	Розрахунки		
8		S	V(S)
9		0	0,0
10		1	16,7
11		2	21,4
12		3	23,7
13		4	25,0
14		5	25,9
15		6	26,5
16		7	26,9
17		8	27,3
18		9	27,6
19		10	27,8

- У чарунки діапазону **B9:B19** введіть кількість субстрату від 0 до 10, користуючись засобом автозаповнення.
- Для швидкості поїдання субстрату у чарунку **C9** введіть рівняння (14.7) Міхаеліса-Ментен.
- Скопіюйте формулу з чарунки **C9** на сусідній діапазон чарунок **C10:C19**, використовуючи засіб автозаповнення. Округліть отримані результати в діапазоні **C9:C19** до одного знаку після коми.

7. Прослідкуйте зміну швидкості споживання їжі від її кількості на графіку (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C9:C19**). Переконайтеся, що графіком є гіпербола, яку ще називають *гіперболою Міхаеліса*.
8. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком (зробіть лінію графіка згладженою).



9. Проаналізуйте результат: коли кількість (концентрація) субстрату необмежено зростає, швидкість поглинання прямує до сталої величини V_{max} .
10. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_14.xlsx*. Завершіть роботу з табличним процесором. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері всі аркуші документу *laboratorna_14.xlsx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію, маючи електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Який розділ математики дозволяє здійснювати моделювання процесів, що змінюються з часом?
2. Наведіть приклад задачі з екології чи біології, що моделюється на основі диференціальних рівнянь.
3. Чи можуть певні динамічні процеси описуватися тригонометричними функціями?
4. Основне рівняння функції росту, що має місце в екології та біології.
5. Які розроблені науковцями математичні моделі динаміки популяцій Вам відомі?
6. Яке рівняння лежить в основі моделі хижака-жертви?
7. Чому неможливо надавати тривалого прогнозу стану динамічної системи, якщо вона перебуває у стані, що близький до динамічного хаосу?

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципы моделирования та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
6. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦПІ «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

Підписано до друку 04.09.2018
Гарнітура Таймс. Друк – ксерокопія. Папір ксероксний.
Ум. друк. арк. _____. Обл. вид. арк. _____. Наклад 15.
ПДАА, вул. Сковороди, 1/3, м. Полтава, 36003

