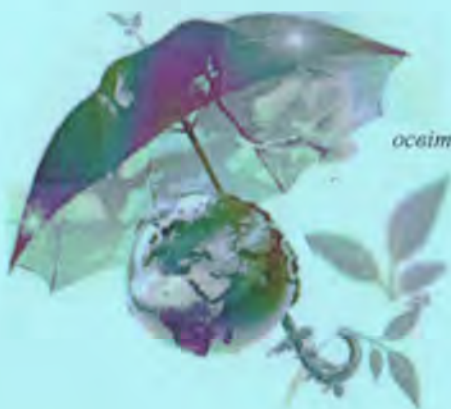


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКА ДЕРЖАВНА АГРАРНА АКАДЕМІЯ

Кафедра інформаційних систем та технологій

Н. М. Протас

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
із дисципліни
“ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ”



*для здобувачів вищої освіти
освітньо-професійної програми Екологія
спеціальності 101 Екологія*

Полтава 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПОЛТАВСЬКА ДЕРЖАВНА АГРАРНА АКАДЕМІЯ

Кафедра інформаційних систем та технологій

Н. М. Протас

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
із дисципліни
“ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ В ЕКОЛОГІЇ”



*для здобувачів вищої освіти
освітньо-професійної програми Екологія
спеціальності 101 Екологія*

Полтава 2019

Завдання для лабораторних робіт з дисципліни «Основи математичного моделювання в екології» для здобувачів вищої освіти освітньо-професійної програми Екологія спеціальності 101 Екологія підготовлені доцентом кафедри інформаційних систем та технологій Н. М.Протас, на основі опрацювання та узагальнення методичних матеріалів кафедри, підготовлених у співавторстві з А. В. Калініченко, О. Г. Міньковою, К. Д. Костоглодом та ін.

Затверджено та рекомендовано до друку на засіданні кафедри інформаційних систем та технологій (протокол № 1 від 02 вересня 2019 р.)

ВСТУП

Мета навчальної дисципліни «Основи математичного моделювання в екології»: формування у майбутніх фахівців теоретичних знань і практичних навичок побудови та використання різних типів математичних моделей в галузі охорони довкілля, формалізації та розв'язання оптимізаційних задач екології та природокористування з застосуванням математичних методів.

Матеріали запропонованої методичної розробки допоможуть здобувачам закріпити теоретичні відомості з дисципліни; покрокове виконання наведених вказівок дозволить сформувати практичні навички використання програмних продуктів для виконання завдань, що можуть виникати у професійній діяльності. Певні оптимізаційні моделі, алгоритми виконання обчислень і використання методів, засоби та можливості табличного процесора щодо розв'язання задач розглянуті на конкретних прикладах.

Підготовку до конкретної лабораторної роботи здобувач вищої освіти здійснює самостійно за день-два до дня виконання цієї роботи шляхом вивчення теоретичного матеріалу, що стосується теми роботи. Короткі пояснення щодо суті дії, яка повинна бути виконана, приведені в даних методичних вказівках, а більш докладно теоретичний матеріал викладений в підручниках і посібниках, перелік яких наведений наприкінці видання.

Безпосереднє виконання роботи здійснюється на комп'ютері згідно завдання під час проведення лабораторного заняття. У кожній з робіт нумеровані пункти списку визначають загальне завдання стосовно певної теми. Підпункти маркірованого списку описують порядок виконання завдання. Якщо подібне завдання вже було описано раніше, то здобувачу необхідно виконати його самостійно.

Наприкінці кожної лабораторної роботи наведені вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи, контрольні запитання щодо розглянутої теми, на які здобувач повинен знати відповіді при захисті звіту; список основних літературних джерел для опанування матеріалу.

ТЕМА 2. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОМУ ВИРОБНИЦТВІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема: Загальна постановка та розв'язування оптимізаційних задач сільськогосподарського виробництва за алгоритмами графічного та симплексного методу

Мета: Опанувати основні поняття дисципліни та завойти етапи моделювання. Навчитися здійснювати постановку та математичне формулювання задач лінійного програмування (ЗЛП), розв'язувати оптимізаційні задачі графічним способом і симплекс-методом

Завдання:

1. Засвоїти основні поняття математичного моделювання: визначення моделі та математичної моделі, властивості та типи моделей; етапи моделювання.
2. Пригадати основні групи економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві. Ознайомитися з прикладами та здійснити математичне формулювання оптимізаційних задач лінійного програмування.
3. Опанувати алгоритм розв'язання ЗЛП графічним способом.
4. Навчитися розв'язувати задачі лінійного програмування (ЗЛП) за алгоритмом симплекс-методу.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, із виходом до мережі Internet

Короткий теоретичний коментар

Нині, коли на планеті Земля під впливом людини відбулися помітні зміни як живої, так і неживої природи, дедалі більшого значення набуває гармонійна взаємодія суспільства і природного довкілля, оскільки людина отримує від природи все необхідне для життя: енергію, продукти харчування, матеріали та черпає в ній емоційну й естетичну наснагу. Тому вкрай необхідна не лише чітка стратегія охорони природного середовища і посилення контролю за природокористуванням, а й розробка ефективних методів попередження негативного впливу господарської діяльності людини на навколишнє середовище з метою:

- раціонального використання природних ресурсів;
- профілактики забруднення довкілля промисловими відходами та транспортом;
- запобігання знищенню природних утворень;
- збереження генофонду рослинного і тваринного світів.

Реалізація цих завдань неможлива без адекватного моделювання і прогнозування стану довкілля.

Реальні біологічні, фізичні, економічні та інші види процесів складні, їх перебіг та поточний стан визначається сукупністю чинників, які тяж пов'язані між собою певними залежностями, тому для їх аналізу і дослідження будують *моделі* таких систем. Існує багато визначень терміну «модель» (у перекладі – «зразок»).

Моделлю називається узагальнення характерних особливостей і закономірностей властивих досліджуваному об'єкту або процесу, виконане певними засобами зображення. Модель – це своєрідний інструмент пізнання дослідником певного об'єкту чи явища; засіб формування чіткого уявлення про дійсність. Але будь-яка модель лише наближено описує реальне явище. Слід відмітити, що один і той самий об'єкт в залежності від цілей дослідження може мати різні моделі. Загальну ж модель об'єкта сформулювати неможливо.

Математична модель – це формалізований опис на мові математики змісту і мети функціонування об'єкта. Математична формалізація економічної задачі одержала найменування *економіко-математичної моделі*. Якщо при розв'язанні економічних задач враховані екологічні складові, то такі моделі можна вважати *еколого-економічними*.

У виробничій практиці поширеними є задачі оптимізації, коли за умови обмежених ресурсів необхідно досягти певного екстремального значення розвитку певної системи.

У сільськогосподарському виробництві часто виникають задачі оптимізації, за умови обмежених ресурсів. Як правило, вони відносяться до задачі лінійного програмування.

Класифікація задач у сільськогосподарському виробництві та природокористуванні:

1). Оптимізаційні задачі:

1. Задачі оптимального виробництва.
2. Задачі складання раціону (про використання ресурсів).
3. Задачі про використання виробничих потужностей (задача про завантаження обладнання).
4. Задачі розкрою матеріалів.

Методи розв'язання оптимізаційних задач об'єднані в розділ математики, який називається математичним програмуванням.

У сільському господарстві можна навести наступні групи економіко-математичних моделей.

1. Моделі оптимізації структури посівних площ.
2. Моделі оптимізації структури і обороту стада.
3. Моделі оптимізації кормових раціонів тварин.
4. Моделі оптимального виробництва і використання кормів
5. Моделі оптимального розподілу мінеральних добрив.
6. Моделі оптимізації складу та використання машинно-тракторного парку.
7. Моделі оптимального поєднання галузей на сільськогосподарських підприємствах та ін.

II). Задачі розподілу ресурсів.

III). Процеси управління запасами.

IV). Задачі ремонту, експлуатації та заміна обладнання.

V). Моделювання конфліктних і конкурентних процесів (ігрові змагання).

VI). Системи масового обслуговування.

У багатьох виробничих і інших системах за звичай, залежності між результуючим фактором та факторною ознакою виражаються нелінійними функціями, що ускладнює процес пошуку розв'язку задачі. Як правило, для спрощення розв'язання, більшість таких оптимізаційних задач відносять до задачі лінійного програмування.

Суть задачі лінійного програмування (ЗЛП) полягає в наступному. Задані система m лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей з n невідомими

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ \dots &\dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

і лінійна цільова функція

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.2)$$

відносно цих же n невідомих.

При цьому на значення невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ (їх ще називають змінними), накладається умова їх невід'ємності, тобто

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (1.3)$$

Необхідно знайти таку сукупність значень n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що задовольняє умовам системи обмежень (1.1), невід'ємності (1.3), для якої цільова функція (1.2) набуває екстремального значення ($\max$ або $\min$).

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в симетричній та несиметричній формі.

Щодо розв'язання задач лінійного програмування, то на сьогодні існують розроблені методи для їх розв'язання. Задача ЛП, представлена в *симетричній формі*, найчастіше всього розв'язується *симплекс-методом*. Для розв'язання задачі, представленої в *несиметричній формі* використовується *симплекс-метод зі штучним базисом (М-метод)*. Якщо в задачі ЛП наявні лише дві чи три основні змінні, то вона може бути розв'язана *графічним способом*.

Порядок і методика виконання завдань

1. *На основі теоретичного матеріалу лекцій, засвоїти основні поняття дисципліни та опанувати етапи моделювання. Виконати практичне завдання на ПК.*

Матеріали для відповідей на оглядові питання, окрім конспекту, слід відшукати у всесвітній мережі Інтернет із використанням пошукових систем. Надалі слід переглянути знайдену інформацію і з двох-трьох знайдених джерел, де найбільш точно розкрита тема, скопіювати інформацію у файл Microsoft Word.

Для закріплення теоретичного матеріалу необхідно у Microsoft Word створити новий документ, де навести визначення поняття «модель», «моделювання» та відтворити загальну схему етапів моделювання із використанням автофігур (стрічка **Вставка**⇒**Фигуры**) або об'єктів SmartArt.

2. *Пригадати основні групи економіко-математичних моделей у сільсько-господарському виробництві. Ознайомитися з прикладами та здійснити математичне формулювання оптимізаційних задач лінійного програмування.*

Для виконання завдання слід переглянути наведені задачі основних груп економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві та продумати які можуть бути в них обмеження для забезпечення раціонального господарювання та збалансованого розвитку агроєкосистем.

Далі уважно прочитати умову кожної запропонованої задачі та здійснити її математичне формулювання, дотримуючись загальної постановки задач лінійного програмування:

- визначити, що є шуканими змінними;
- записати цільову функцію;
- з'ясувати, які ресурси є обмеженими для досягнення мети та, відповідно, скласти формули обмежень;
- увести в задачу умову невід'ємності змінних.

Скорочено у математичному вигляді основну задачу ЛП записують так:

$$\text{знайти } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \begin{matrix} \text{min} \\ \text{max} \end{matrix}$$

$$\text{за наступних обмежень } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, m$$

та невід'ємності змінних $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Поміркувати, як змінити цільову функцію чи які обмеження можна ввести в окремі задачі, щоб забезпечити ведення екологобезпечного сільськогосподарського виробництва.

Так, наприклад, у *задачах оптимізації посівних площ*, агротехнічні вимоги щодо впровадження науково-обґрунтованої сівозміни подаються обмеженнями, га:

- площа зернових культур може бути в межах 60 % усієї посівної площі;
- насичення сівозміни озимою пшеницею рекомендоване в межах 20-30 % усіх культур;
- площа ячменю ярого повинна складати 10 % посівної площі господарства;
- оскільки насичення сівозмін горохом понад 10 % призводить до істотного зниження його врожайності, а понад 20-30 % - до зниження врожайності усіх зернових культур то площа посіву гороху має знаходитися в межах 10 % площі посіву культур;
- насичення сівозміни просапними культурами дозволяється до 40 %;
- площа посіву кукурудзи на зерно має знаходитися в межах 20 % посівної площі;
- площа технічних культур може бути в мжах 10 % усієї посівної площі господарства;
- площа соняшнику для зони Лісостепу допустима в межах 10 % загальної площі посіву;
- насичення сівозміни кормовими культурами з метою збалансованості кормового раціону має бути не менше, ніж 30 %;
- багаторічні бобові трави для підвищення родючості ґрунтів мають становити не менше 50 % посівів у кормовій групі (без коренеплодів);
- площа багаторічних трав на насіння має займати не більше 3 % загальної площі ріллі
- насичення сівозміни зайнятими парами

Окрім цього, у *задачах щодо оптимізації рослинництва* додаються обмеження за балансом поживних речовин (азоту, рухомого фосфору, калію), обмеження за забезпеченням ерозійного фону земель, (за ерозійною небезпекою сівозмін) тощо.

В організації та плануванні галузей тваринництва важливе значення має *оптимальна структура стада*, тобто з зоотехнічної та економічної точки зору найбільш ефективне співвідношення окремих статевих та вікових груп тварин. Відомо, що від структури стада в значній мірі залежать розширене відтворення на фермах, інтенсивність використання маточного поголів'я, об'єм виробництва продукції та її собівартість, кількість продукції в розрахунку на одиницю худоби, кількість необхідних кормів, господарчих будівель та ін. Структура стада кожного конкретного господарства залежить від його виробничої направленості, від породного складу стада, від системи його відтворення, від плодовитості маток та тривалості вирощування молодняку, від строків вирощування молодняку, від термінів виробничого використання маточного поголів'я, від умов годівлі та утримання тварин. Взаємозв'язок перелічених факторів дозволяють врахувати методи лінійного програмування, щої обумовлює найефективнішу структуру стада в господарствах

При оптимізації стада ВРХ вводяться обмеження:

- сума статевовікових груп (корови; бики племінники; нетелі; бички у віці до 6 місяців; телички у віці до 6 місяців; бички у віці від 6 до 12 місяців; телички у віці від 6 до 12 місяців; бички у віці 12 – 18 місяців; телички у віці 12 – 18 місяців; дорослі тварини на відгодівлі) повинна бути рівною 1.
- число нетелів повинне бути більше або дорівнює числу корів, необхідних для розширення стада.
- раціональне співвідношення молодняку до 6-ти місячного віку та маткового поголів'я;
- поголів'я молодняку в молодших групах повинне бути більше, ніж у старших
- співвідношення ділового виходу молодняку статевовікових груп;
- зв'язок маткового поголів'я і ремонтного молодняку старших груп;
- співвідношення між теличками та бичками у віці до 6 місяців тощо.

Для ефективного розвитку тваринництва важливе місце займають *задачі оптимізації раціонів*. При складанні раціоні годівлі слід розрахувати такий вміст компонентів у раціоні, щоб забезпечити фізіологічну потребу тварин у поживних речовинах і мікроелементах при мінімальній вартості раціону. Причому, задачі складаються для кожної групи тварин окремо, в залежності від норм, забезпечуючи:

- збалансованість кормового раціону за вмістом поживних речовин і перетравного протеїну; мікроелементів;
- забезпечення потреби і норм у кожній групі кормів окремо (грубих, соковитих, концентрованих);
- нормативний вміст окремих інгредієнтів (сіно, силос тощо) у раціоні тощо.

Для раціональної організації сільськогосподарського виробництва та поліпшення використання техніки дуже важливе значення має планування оптимального забезпечення господарств необхідною сільськогосподарською технікою. Велика кількість факторів, що впливають на результати її використання, вимагає визначення *оптимальної структури машино-тракторного парку*. Один і той самий тип машин може мати різні конструкторські рішення і характеризуватися різною економічністю роботи. У зв'язку з цим слід підбирати такі типи тракторів, машин та інших знарядь, які максимально відповідали б агротехнічним вимогам і були найбільш вигідними в умовах конкретного господарства, району чи регіону.

Моделі оптимального поєднання галузей на сільськогосподарських підприємствах дозволяють поєднати та здійснити комплексну оптимізацію роботи усіх галузей. Визначення оптимального поєднання галузей є однією з найважливіших задач діяльності підприємств та дозволяє досягти наступних ефектів: економічного (збільшення прибутку, валової продукції або зниження витрат виробництва); соціального (організація зайнятості сільського населення, підвищення добробуту працівників) та агроекологічного (покращення структури ґрунтів, їх агрофізичного та фіто санітарного стану, повітряного та водного режимів, позитивного балансу гумусу, розвиток біогенних елементів, екологічних характеристик виробленої продукції).

3. Опанувати алгоритм розв'язання ЗЛП графічним способом.

Слід пригадати етапи розв'язання задач лінійного програмування графічним способом. З'ясувати особливі випадки, що можуть мати місце при розв'язанні ЗЛП графічним способом.

Використовуючи алгоритм графічного способу, слід поетапно розв'язати запропоновані задачі та сформулювати відповідь.

Основні етапи розв'язання графічним способом задачі ЛП з двома змінними.

1. Будуємо графічне зображення області допустимих розв'язків згідно обмежень задачі у вибраній системі координат (x_1, x_2) .
2. Будуємо вектор $\vec{c}(c_1, c_2)$, що називається вектором-градієнтом, який вказує напрям найшвидшого досягнення точки оптимуму.
3. Будуємо лінію рівня цільової функції $Z = f(x_1, x_2)$. де функція Z приймає сталі значення.
4. Знаходимо розв'язок відповідної ЗЛП з використанням наявних графічних даних. Розв'язок ЗЛП лежить у вершині або на ребрі області допустимих розв'язків.
5. Визначаємо координати точки (точок) максимуму (мінімуму) і обчислюємо значення цільової функції в точці (точках).

4. Навчитися розв'язувати задачі лінійного програмування (ЗЛП) за алгоритмом симплекс-методу.

Повторити алгоритм розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом.

Розв'язати запропоновані задачі за вказаним алгоритмом. Симплекс-таблиці для розв'язання задач створити у електронних таблицях Microsoft Excel. Всі необхідні формули в чарунки Excel ввести з клавіатури, за потреби здійснивши абсолютні посилання на певні чарунки.

АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ В СЛОВЕСНО-ФОРМУЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ:

1. Умову задачі записати у вигляді цільової лінійної функції (1.1) та системи лінійних відношень (1.2).
2. Привести умову до канонічного виду, який передбачає перетворення тих з обмежень системи (1.2), що містять знак " $\leq$ " в обмеження, що містять знак " $=$ ". Це перетворення досягається шляхом введення в кожне обмеження, що містить знак " $\leq$ ", відповідної допоміжної змінної $x_{n+1}, x_{n+2} \dots$. Кількість допоміжних змінних при записі умови задачі в канонічному вигляді відповідає кількості обмежень, у яких був знак " $\leq$ ". Допоміжні змінні вводяться й у цільову функцію (1.1), але з нульовими коефіцієнтами (оцінками).
3. Записати опорний план розв'язку задачі у вигляді першої симплекс-таблиці (СТ), загальний вигляд якої та принципова схема наведені у таблицях 1 і 2.

Загальний вигляд СТ

I	B	C_i / C_j	B _i	Коефіцієнти при змінних у цільовій функції	b_i / a_{ij}^*
				Шапка матриці – усі змінні системи	
Номер рядка таблиці	Базисні змінні	Коефіцієнти цільової функції при базисних змінних	Вільні члени обмежень (результуючий стовпчик)	Коефіцієнти при невідомих в обмеженнях	Відношення для визначення розв'я- зуючого рядка
m+1	Z_j		Значення цільової функції	Цільовий рядок	

Схема заповнення першої СТ

i	B	C_j	Bi	C_1	C_2	$\dots$	C_n	0	0	$\dots$	0	b_i/a_{ij}^*
		C_i		x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	
1	x_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	
2	x_{n+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
m	x_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	
$m+1$	Z_j		0	$-C_1$	$-C_2$	$\dots$	$-C_n$	0	0	$\dots$	0	

4. Перевірити план на оптимальність. Умовою оптимальності розв'язання стандартної задачі лінійного програмування є відсутність в $m+1$ -му рядкові в стовпчиках $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ від'ємних чисел. Якщо умова оптимальності виконується, то перейти до п.14 алгоритму.

При невиконанні умови оптимальності необхідно перевірити, чи має задача розв'язок. Якщо в $m+1$ рядку є хоча б один від'ємний елемент, якому відповідає стовпець з недодатніми елементами, то цільова функція в області допустимих значень змінних необмежена. Якщо умова не виконується, то слід продовжити розв'язання задачі, перейшовши до п.5 алгоритму.

5. Визначити розв'язуючий (дозволяючий, ключовий) стовпчик симплекс-таблиці. В зв'язку з тим, що задача розв'язується на максимум, то таким буде стовпчик, якому відповідає найменше від'ємне число серед елементів індексного рядка. Елементи розв'язуючого стовпчика в рядках $1, 2, \dots, m$ позначаються через a_{ij}^* .

6. Розрахувати відношення b_i/a_{ij}^* , записавши їх в останній стовпчик СТ.

7. По найменшому з відношень b_i/a_{ij}^* , визначити розв'язуючий (дозволяючий, ключовий) рядок СТ.

8. Визначити розв'язуючий (дозволяючий, ключовий) елемент СТ. Він стоїть на перетині розв'язуючих рядка і стовпчика a_{rk}

9. Побудувати нову СТ. Її розміри такі, як і розміри попередньої СТ.

10. Визначити початковий рядок нової СТ, номер якого та місце розташування відповідає номеру та місцю розташування розв'язуючого рядка попередньої СТ. В базис початкового рядка нової СТ записується та змінна, яка була в розв'язуючому стовпчику попередньої СТ; оцінка ж цієї змінної заноситься в сусідній стовпчик $C_i \setminus C_j$.

11. Обчислити елементи початкового рядка нової СТ за формулою

$$a'_{pj} = a_{rj} / a_{rk} \quad (1.4)$$

<i>Елемент початкового рядка нової СТ</i>	=	<i>Відповідний елемент розв'язуючого рядка попередньої СТ</i>
		<i>Розв'язуючий елемент попередньої СТ</i>

12. Обчислити елементи інших рядків нової СТ, у тому числі й елементи індексного рядка, за правилом трикутника

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a'_{pj} \quad (1.5)$$

<i>Елемент нової таблиці, що стоїть не в початковому рядку</i>	=	<i>Елементу попередньої таблиці, що стоїть на тому ж місці, для якого розраховується елемент нової таблиці</i>	-	<i>Елемент розв'язуючого стовпчика попередньої таблиці того рядка, для якого розраховується елемент нової таблиці</i>	×	<i>Елемент початкового рядка нової СТ з того стовпчика, для якого розраховується елемент нової таблиці</i>
--	---	--	---	---	---	--

13. Перейти до п.4 алгоритму

14. Записати розв'язок і проаналізувати результат при виконанні умови оптимальності.

У стовпчику B_i знаходяться оптимальні значення базисних змінних і максимум цільової функції.

15. Перевірити, чи є оптимальний план єдиним, чи їх існує безліч. Для цього необхідно перевірити чи є у $m+1$ рядку нульові значення в стовпчиках тих змінних, що не ввійшли в базис оптимального розв'язку. Якщо немає, то розв'язок єдиний, якщо є, то розв'язків нескінченна множина.

5. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створені файли *laboratorna_1.docx*, *laboratorna_1.xlsx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Вправа 1. Засвоєння основних понять математичного моделювання

1. Сформулюйте визначення таких понять: модель, математична модель, економіко-математична модель та моделювання.
2. Назвіть роль і місце сучасних математичних методів і моделей в екології
3. Завантажте програму-браузер, встановлену на Вашому ПК і знайдіть 2-3 різних визначення поняття «модель» та моделювання». Скопіюйте по одному з них у новий документ текстового процесора Microsoft Word.
4. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_1*.
5. У документі *laboratorna_1.docx* подайте у вигляді схеми основні етапи моделювання.
6. Наведіть приклади задач моделювання, що можуть виникати в екології.
7. Охарактеризуйте основні групи економіко-математичних моделей у сільськогосподарському виробництві.
8. У всесвітній мережі Інтернет знайдіть інформацію щодо існуючих математичних моделей агробіопроцесів, розроблених науковцями. Проаналізуйте знайдений матеріал. Визначте, які, на Вашу думку, математичні моделі мають найбільшу практичну цінність.
9. На основі знайденої інформації у мережі Internet, складіть невеликий перелік математичних моделей агробіопроцесів і оформіть його з нової сторінки файлу *laboratorna_1*.
10. Збережіть створений документ *laboratorna_1.docx*

Вправа 2. Ознайомлення з прикладами задач лінійного програмування сільськогосподарського виробництва та математичне формулювання оптимізаційних задач

1. Сформулюйте суть задачі лінійного програмування.
2. Ознайомтеся з наведеними нижче оптимізаційними задачами сільськогосподарського виробництва.

Оптимізація структури посівних площ

Приклад 1.

Згідно агротехнічних норм у господарстві для вирощування технічних культур може бути виділено 900 га ріллі та може бути відпрацьовано 17600 люд.-год. Прямі витрати праці на 1 га цукрових буряків і соняшника плануються відповідно 40 та 6 люд.-год., а урожайність цих культур – відповідно 320 і 18 ц/га.

Визначити такі площі посіву означених культур, які забезпечили б максимум товарної продукції за умови, що площа соняшника не перевищує 80% загальної площі посіву технічних культур. Закупівельна ціна 1 ц цукрових буряків становить 84 грн, а 1 ц соняшнику – 900 грн.

Приклад 2.

Визначити оптимальні площі посіву кормових культур у господарстві, якщо відомо, що на їх вирощування може бути виділено b_1 тис.грн, b_2 га ріллі, в тому числі на вирощування кукурудзи на силос – не більше b_3 га. Сіна однорічних трав планується отримати не менше b_4 центнерів кормових одиниць. Плановий вихід кормів на 1 га (в ц.к.од.), виробничі затрати на 1 га (в гривнях) по культурах наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

Показники	Культури		
	кукурудза на силос	кормові буряки	однорічні трави на сіно
Виробничі витрати, грн/га	a_1	a_2	a_3
Вихід кормів. ц.к.од./га	40	80	20

Площі повинні забезпечити максимальний вихід кормів у кормових одиницях

Приклад 3.

Розрахувати оптимальний план розподілу мінеральних і органічних добрив в господарстві під посів двох сільськогосподарських культур – озимої пшениці і кукурудзи на зерно, так, щоб отримати максимальну урожайність (в центнерах і гривнях) за рахунок внесення добрив. Під вирощування продовольчих культур виділяється b_1 га ріллі, b_2 ц органічних добрив і b_3 ц діючої речовини мінеральних добрив. Норми внесення мінеральних і органічних добрив на 1 га кожної культури (в центнерах діючої речовини і в центнерах), прибавка врожаю за рахунок внесення добрив з 1 га (в центнерах) наведені в таблиці 3.

Таблиця 3.

Показники	Культури	
	Озима пшениця	Кукурудза на зерно
1. Норми внесення мінеральних добрив, ц діючої речовини /га	2,2	2,4
2. Норми внесення органіки, ц/га	225	310
3. Прибавка врожаю за рахунок внесення добрив, ц/га:	9,6	10,8

Оптимізація кормових раціонів тварин

Приклад 4.

Визначити оптимальний варіант добового раціону годівлі дійних корів молочного напрямку в стійловий період при жирності молока 3,8 %, середньодобовому надої 18 кг і живій масі корови 470 кг. Господарство має корми трьох видів: концентровані, грубі, соковиті (силос).

Мінімально допустима добова потреба, розрахована з вагою корови, її продуктивністю і жирністю молока, складає 13 корм.од. Відомі середній вміст кормових одиниць в 1 кг кожної групи кормів і собівартість 1 кг кормів (таблиця 4).

Таблиця 4.

Показники	Корми		
	концентровані	грубі	силос
Поживність кормів, корм.од./кг	1,0	0,4	0,2
Собівартість кормів, грн./кг	3,9	0,6	1,25

За рахунок грубих кормів повинно забезпечуватися не більше 20% фізіологічної потреби корів у кормових одиницях. Добовий раціон повинен містити не більше b_1 кг силосу, не більше b_2 кг концентратів.

Оптимальний добовий раціон повинен мати мінімальну собівартість і забезпечувати фізіологічні потреби тварин.

Приклад 5.

З комбікорму, цукрових буряків та трав'яного борошна необхідно скласти кормовий раціон для свинопоголів'я на відгодівлі, добова потреба якого в розрахунку на 1 голову складає 4 корм.од. і 400 г перетравного протеїну. Визначити такий склад кормового раціону, який мав би мінімальну вартість і забезпечував би потреби тварин у поживних речовинах за умови, що вміст трав'яного борошна у ньому не може бути більшим 0,4 кг. Поживність кормів і їх вартість наведена в таблиці 5

Таблиця 5.

Показники	Корми концентровані	Цукрові буряки	Трав'яне борошно
Поживність корму, корм.од./кг	1,10	0,26	0,60
Вміст перетравного протеїну, г/кг	120	13	150
Вартість корму, коп./кг	240	50	110

Оптимізація складу та використання машинно-тракторного парку

Приклад 6.

Упродовж тижня (6 робочих днів) гусеничні трактори ДТ-75М, CASE IH STX 450 і колісні трактори МТЗ-82 і JOHN DEERE 8300 можуть відпрацювати на оранці 250 тракторо-змін. Коефіцієнт змінності гусеничних тракторів становить 2, а колісних – 1,5. Експлуатаційні витрати за тиждень в розрахунку на один трактор відповідно становлять 1100 і 1160, 700 і 740 грн. Необхідно визначити таку кількість тракторів кожної з марок, яка забезпечила б максимальний обсяг робіт за умов, що змінний виробіток одного трактора ДТ-75М становить 7 га, CASE IH STX 450 – 8 га, МТЗ-82 – 6 га, JOHN DEERE 8300 – 6,4 га. Загальна сума експлуатаційних витрат не повинна перевищувати 13 тис.грн. Кількість тракторів ДТ-75М не може бути більшою 3.

Приклад 7.

Відпускні ціни на автомобілі, їх вантажопідйомність, середньодобовий пробіг і коефіцієнти використання вантажопідйомності та пробігу наведені в табл.7.

Визначити оптимальний план поповнення автопарку, враховуючи наступне:

- кількість бортових автомобілів (ГАЗ і КАМАЗ) повинна становити не менше 75% від загальної кількості автомобілів;
- кількість автомобілів ГАЗ-3307 повинна бути не менше 4 штук;
- придбані автомобілі повинні забезпечити виконання 900 тис.т-км за рік (250 робочих днів) при мінімальних загальних витратах на їх придбання.

Таблиця 7

Показники	Марки автомобілів		
	ГАЗ-3308	КАМАЗ-43114	ЗІЛ-4331
Відпускні ціни, тис.грн	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Вантажопідйомність, т	4,0	10,0	9,5
Середньодобовий пробіг, км	100	120	80
Коефіцієнт використання:			
– вантажопідйомності	0,6	0,8	0,8
– пробігу	0,8	0,5	0,5

Оптимізація поєднання галузей

Приклад 8.

У фермерському господарстві, що має овочево-молочну спеціалізацію, упродовж року в основних галузях може бути відпрацьовано 10 тис.люд.-днів. Витрати праці на одну структурну корову плануються 65, а на 1 га овочів – 90 люд.-днів. Матеріальні витрати та витрати на оплату праці у молочному скотарстві на одиницю виміру галузі складають 7,5 тис.грн., а в овочівництві – 4,8 тис.грн., вихід же валової продукції відповідно дорівнює 9,6 та 6,8 тис.грн.

Визначити оптимальні розміри галузей молочного скотарства та овочівництва, які забезпечували б виробництво валової продукції на суму, не меншу 900 тис.грн. при мінімальних виробничих витратах та з урахуванням того, що умови господарювання дозволяють утримувати корів – в межах 65-90 голів.

Приклад 9.

Розрахувати оптимальні розміри тваринницьких підгалузей у господарстві, якщо відомо, що загальні витрати у галузі не можуть перевищувати b_1 тис.грн, прямі затрати праці можуть бути не більше 11700 люд.-днів, а витрати кормів – не більше 19200 ц.к.од. Норми витрат виробничих ресурсів і виходу продукції в розрахунку на одиницю виміру галузі наведені в табл. 9.

Таблиця 9.

Показники	Структурна корова	Свиноматка	Вівцематка
Загальна сума витрат	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Прямі затрати праці, люд.-дні	70	60	6
Витрати кормів, ц.к.од.	80	100	10
Валова продукція, тис.грн.	c_1	c_2	c_3

Оптимальні розміри галузі повинні забезпечувати максимум виробництва валової продукції.

- Продумайте як можна змінити цільову функцію чи які обмеження можна додати в ці задачі для забезпечення раціонального господарювання та збалансованого розвитку агроєкосистем.
- Здійсніть математичне формулювання та складіть модель запропонованої задачі

Приклад 10.

Розрахувати оптимальний план розподілу біологічних і мінеральних добрив у підприємстві під посів двох сільськогосподарських культур – озимої пшениці та кукурудзи на зерно так, щоб отримати максимальний приріст валового збору зерна за рахунок внесення добрив. Під вирощування продовольчих культур виділено 690 га ріллі та 160,3 тис.грн. на закупівлю мінеральних та біологічних добрив. В якості азотних добрив заплановано використати селітру, ціна якої 3 330 грн/т, а в якості біологічних добрив – ризоентерін під озиму пшеницю і флавобактерін під кукурудзу. У зв'язку з тим, що господарство переводимо на альтернативні технології землеробства, то плануємо максимально використати можливості біопрепаратів і тільки залишковий негативний баланс азоту компенсувати за рахунок мінеральних добрив. Додаткові дані щодо норм внесення добрив, дефіциту азоту біопрепаратів, вартість біологічних добрив та прибавка врожаю культур наведені в табл. 10.

Таблиця 10.

№ з/п	Показники	Культури	
		озима пшениця	кукурудза на зерно
1	Норми внесення азотних добрив, кг діючої речовини на 1 га	60	90
2	Заощадження від застосування біопрепаратів, кг/га діючої речовини азотних добрив	44	58
3	Вартість однієї нектарної норми біодобрив, грн	30	34
4	Приріст врожайності культур, ц/га	7,4	12,7

Необхідно врахувати також, що для покриття власних потреб господарству потрібно вирощувати не менше 200 га кукурудзи.

Математичне формулювання:

Нехай, x_1 – площа посіву озимої пшениці, під яку вносяться добрива, га
 x_2 – площа посіву кукурудзи на зерно, під яку вносяться добрива, га

Як вказано в умові, біологічні добрива забезпечують дефіцит азоту під пшеницю та кукурудзу відповідно у кількості 44 та 58 кг/га діючої речовини, а залишковий негативний баланс азоту будемо забезпечувати за рахунок аміачної селітри.

Якщо врахувати, що в селітрі 30 % діючої речовини, то:

- вартість необхідно кількості мінеральних добрив під 1 га пшениці:

$$\frac{3330}{1000 \cdot 0,3} (60 - 44) = 177,6 \text{ грн/га, де}$$

$$\frac{3330}{1000} \cdot \frac{100 \%}{30 \%} = \frac{3330}{1000 \cdot 0,3} \text{ – необхідна кількість аміачної селітри на 1 га}$$

$(60 - 44) -$ враховуючи те, що діюча речовина складає 30% негативний баланс азоту після застосування різоентерину

- вартість необхідно кількості мінеральних добрив під 1 га кукурудзи:

$$\frac{3330}{1000 \cdot 0,3} (90 - 58) = 355,2 \text{ грн/га, де}$$

$$\frac{3330}{1000} \cdot \frac{100 \%}{30 \%} = \frac{3330}{1000 \cdot 0,3} \text{ – необхідна кількість аміачної селітри на 1 га}$$

$(90 - 58) -$ враховуючи те, що діюча речовина складає 30% негативний баланс азоту після застосування флавобактерину

Тоді обмеження та цільова функція матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 690 && \text{за обсягом відведеної ріллі} \\ (177,6 + 30)x_1 + (32,2 + 34)x_2 &\leq 160300 && \text{за вартістю добрив} \\ x_2 &\geq 200 && \text{за площею під кукурудзу} \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 && \text{невід'ємність шуканих змінних} \\ Z = 7,4x_1 + 12,7x_2 &\rightarrow \max && \text{приріст валового збору зерна з шуканих площ.} \end{aligned}$$

5. Запишіть умову прикладу 10 та отриману модель даної задачі лінійного програмування у файл *laboratorna_1.docx*.
6. У файлі *laboratorna_1.docx* запишіть умову та побудуйте модель ще однієї задачі (приклад 1-9), яку обрати навласний розсуд.
7. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_1.docx* та завершіть роботу з текстовим процесором Microsoft Word.

Вправа 3. Розв'язання задач лінійного програмування графічним способом

1. Пригадайте алгоритм розв'язання задач лінійного програмування графічним способом і умови його застосування.
2. Назвіть особливості графічної інтерпретації задачі у випадку, коли задача має безліч розв'язків.
3. Охарактеризуйте випадки, коли задача лінійного програмування не має розв'язків.
4. У прямокутній системі координат $x_1 O x_2$ наведіть графічний розв'язок нерівності $3x_1 + 6x_2 \leq 18$
5. Розв'яжіть за алгоритмом графічного способу задачу лінійного програмування прикладу 10.

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 \leq 690 \\ (177,6 + 30)\delta_1 + (32,2 + 34)\delta_2 \leq 160300 \\ \delta_2 \geq 200 \\ \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 7,4\delta_{11} + 12,7\delta_2 \rightarrow \max$$

6. Розв'яжіть одну з наведених нижче задач лінійного програмування (приклади 11-15) графічним способом.

Приклад 11.

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Приклад 12.

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Приклад 13.*Обмеження задачі:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

Приклад 14.*Обмеження задачі:*

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Приклад 15.

Під вирощування пшениці та ячменю у господарстві може бути відведено 100 га ріллі та 600 люд.-дні. Витрати праці на 1 га пшениці 4 люд.-дн., ячменю – 5 люд.-дн. Урожайність обох культур планується у розмірі 30 ц/га.

Знайти оптимальні площі посіву зернових культур, щоб забезпечити максимальний валовий збір зерна. Врахувати, що для власних потреб господарству необхідно не менше 750 ц пшениці та не менше 600 ц ячменю.

Вправа 4. Розв'язання задач лінійного програмування за алгоритмом симплекс-методу

1. Сформулюйте, які задачі лінійного програмування можна розв'язати симплекс-методом (СМ).
2. Повторіть алгоритм розв'язання задач лінійного програмування СМ.
3. Поясніть, як звести задачу до канонічного вигляду.
4. Назвіть умову оптимальності при розв'язанні ЗЛП симплекс-методом.
5. Пригадайте, чи завжди ЗЛП має розв'язок? За яких у симплекс-таблицях робиться висновок про необмеженість цільової функції в задачі?
6. Опишіть випадок, коли задача має безліч розв'язків.
7. Складіть модель та розв'яжіть одну з запропонованих задач сільсько-господарського виробництва за алгоритмом симплекс-методу на ПК у табличному процесорі Microsoft Excel за технологією ручного проведення розрахунків.

Приклад 16.

Під вирощування озимих зернових та кукурудзи на зерно у господарстві може бути відведено 1000 га ріллі та 8000 люд.-днів. Затрати праці на 1 га озимих становлять 4 люд.-дн., кукурудзи – 20 люд.-дн. Урожайність культур планується відповідно у розмірі 35 та 50 ц/га.

Знайти оптимальні площі посіву зернових культур, щоб забезпечити максимальний валовий збір зерна.

Приклад 17.

Визначити оптимальний склад автопарку для забезпечення максимального обсягу транспортних робіт (у т-км), за умов, що загальна кількість автомобілів не повинна перевищувати 11 штук, а автомобілів ГАЗ – не більше 9 штук. Річні витрати по експлуатації автопарку повинні знаходитися в межах 40 тис.грн.

Запланований обсяг виконання тонно-кілометрів за рік, експлуатаційні витрати по кожній марці автомобілів наведені в таблиці

Показники	Марки автомобілів		
	ГАЗ – 3309	ГАЗ – 3307	КАМАЗ – 4308
Виробіток, тис.т-км	42	45	50
Експлуатаційні витрати, грн.	3000	3500	5000

Приклад 18.

У господарстві було прийнято рішення відродити галузь птахівництва – вирощувати бройлерів, качок, гусей і індиків. Площа виробничих приміщень дозволяє утримувати не більше 6000 голів птиці, причому індиків – не більше 1000 голів. За рік затрати праці не можуть перевищувати 720 людино-днів; витрати комбікорму на годівлю птахів мають бути не більше 3500 ц; витрати соломи злакової для підстилки – не більше 1100 ц.

Вихідні дані на 1 гол. за рік наведені в таблиці

Показники	Птиця			
	бройлери	качки	гуси	індики
Затрати праці, люд.-дні	0,1	0,12	0,12	0,15
Витрати комбікорму, ц	0,4	0,65	0,56	0,7
Норми підстилки, ц	0,12	0,25	0,2	0,22
Вихід м'яса, кг	2,45	3,5	4	7,5

Встановити оптимальні розміри галузі птахівництва для отримання максимуму валової продукції.

8. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel. Створіть симплекс-таблиці.

Для розв'язання задачі на ПК (наводиться розв'язання прикладу 18) :

- Уведіть у чарунку A1 текст СИМПЛЕКС-МЕТОД, а в чарунку A2 текст Перша симплекс-таблиця.
- Почергово об'єднайте діапазон чарунок A1:K1 та діапазон A2:K2.

- Починаючи з чарунки A3 створіть пустий бланк першої симплекс-таблиці для розв'язання задачі, в якій буде п'ять обмежень та дев'ять змінних (з яких 4 основні). Для проведення обрамлень скористайтеся кнопкою Границы стандартної панелі інструментів, або командою контекстного меню Формат ячейки (вкладка Границы).
- Скопіюйте діапазон A2:N10 у буфер обміну та вставте його тричі, починаючи з чарунк A11, A20, A29. Відредагуйте чарунки A11, A20, A29, щоб отримати готовий бланк для розв'язання усієї задачі за алгоритмом СМ.
- Надайте активному аркушу назву СМ-БЛАНК.
- Збережіть результат роботи у Вашій папці диску D з іменем *laboratorna_1.xlsx*.
- Створіть копію аркушу СМ-БЛАНК. Аркушу з копією надайте назву відповідно СМ-Задача18
- Активізуйте аркуш СМ-Задача18. Виконайте потрібні дії в Excel для розв'язання задачі:
- Заповніть першу симплекс-таблицю, усі необхідні значення з умови задачі занесіть у відповідні клітинки (крім рядка $m+1$ та стовпчика b_i/a_{ij}^*). Для заповнення скористайтеся можливістю об'єднання клітинок
- Для заповнення $m+1$ рядка в клітинку E10 введіть формулу =-E3, тобто задайте відповідний коефіцієнт цільової функції з протилежним знаком. Далі шляхом протягування за допомогою миші скопіюйте формулу на весь рядок. Якщо план не є оптимальний (в $m+1$ рядку присутні від'ємні елементи), то розрахуйте другу симплекс-таблицю.
- Знайдіть розв'язуючий стовпчик (найменше від'ємне значення у рядку $m+1$) і позначте його довільним кольором. Тепер заповніть стовпчик b_i/a_{ij}^* . Для цього в клітинку N5 введіть формулу =D5/H5. Далі шляхом протягування копіюємо формулу на весь стовпчик.
- **Увага!** При діленні на нуль у клітинці буде виведено відповідне повідомлення. Таку клітинку, або клітинку з від'ємним значенням можна позначити хрестиком і у подальших обчисленнях її враховувати не слід.
- Тепер знайдіть у заповненому стовпчику b_i/a_{ij}^* мінімальне значення. Виділіть даний рядок довільним кольором.
- Перейдіть до заповнення наступної симплекс-таблиці.
- Почніть заповнювати другу таблицю з початкового другого рядка. У чарунку D15 введіть формулу =D6/\$H\$6. Далі скопіюйте формулу на весь рядок. Абсолютна адреса розв'язуючого елемента (\$H\$6) при копіюванні змінюватися не буде. Знак \$ перед позицією вказує на фіксування цієї позиції при копіюванні формули. Якщо знак \$ стоїть перед літерою, то фіксується стовпчик, а якщо перед цифрою – фіксується рядок.
- Усі інші рядки таблиці заповніть за правилом трикутника. Для цього у клітинку D14 введіть формулу =D5-\$H5*D\$15 і створіть її копію по всіх чарунках рядка. Далі скопіюйте цю формулу з чарунки D14 в чарунку D16 (там має з'явитися формула =D7-\$H7*D\$15) та аналогічно протягніть її по рядку, а потім, за допомогою маркера авто заповнення протягніть весь рядок вниз, аж до чарунки M19.
- Таблиця заповнена. Тепер аналогічно описаному вище з'ясуйте чи є план оптимальним і при необхідності розрахуйте наступні симплекс-таблиці.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		i	B _i		2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
4			$\frac{C_i}{C_j}$		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄			x ₇
5	1	x ₅ 0	6000		1	1	1	1	1	0	0
6	2	x ₆ 0	10000		0	0	0	1	0	1	0
7	3	x ₇ 0	720		0,1	0,12	0,12	0,15	0	0	1
8	4	x ₈ 0	3500		0,4	0,65	0,56	0,7	0	0	0
9	5	x ₉ 0	1100		0,12	0,25	0,2	0,22	0	0	0
10	next I	Z ₇ 0			=E3	=F3	=G3	=H3	=I3	=J3	=K3
11											
12	i	B _i			2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
13			$\frac{C_i}{C_j}$		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄			x ₇
14	1	x ₅ 0	=D5-8H5*D815		=E5-8H5*E815	=F5-8H5*F815	=G5-8H5*G815	=H5-8H5*H815	=I5-8H5*I815	=J5-8H5*J815	=K5-8H5*K815
15	2	x ₄ 7,5	=D6-8F815		=E6-8F815	=F6-8F815	=G6-8F815	=H6-8F815	=I6-8F815	=J6-8F815	=K6-8F815
16	3	x ₇ 0	=D7-8H7*D815		=E7-8H7*E815	=F7-8H7*F815	=G7-8H7*G815	=H7-8H7*H815	=I7-8H7*I815	=J7-8H7*J815	=K7-8H7*K815
17	4	x ₃ 0	=D8-8F8*D815		=E8-8F8*E815	=F8-8F8*F815	=G8-8F8*G815	=H8-8F8*H815	=I8-8F8*I815	=J8-8F8*J815	=K8-8F8*K815
18	5	x ₉ 0	=D9-8H9*D815		=E9-8H9*E815	=F9-8H9*F815	=G9-8H9*G815	=H9-8H9*H815	=I9-8H9*I815	=J9-8H9*J815	=K9-8H9*K815
19	next I	Z ₅			=E10-8H10*E815	=F10-8H10*F815	=G10-8H10*G815	=H10-8H10*H815	=I10-8H10*I815	=J10-8H10*J815	=K10-8H10*K815
20											
21	i	B _i			2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
22			$\frac{C_i}{C_j}$		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄			x ₇
23	1	x ₅ 0	=D14-8G14*D827		=E14-8G14*E827	=F14-8G14*F827	=G14-8G14*G827	=H14-8G14*H827	=I14-8G14*I827	=J14-8G14*J827	=K14-8G14*K827
24	2	x ₄ 7,5	=D15-8G15*D827		=E15-8G15*E827	=F15-8G15*F827	=G15-8G15*G827	=H15-8G15*H827	=I15-8G15*I827	=J15-8G15*J827	=K15-8G15*K827
25	3	x ₇ 0	=D16-8G16*D827		=E16-8G16*E827	=F16-8G16*F827	=G16-8G16*G827	=H16-8G16*H827	=I16-8G16*I827	=J16-8G16*J827	=K16-8G16*K827
26	4	x ₈ 0	=D17-8G17*D827		=E17-8G17*E827	=F17-8G17*F827	=G17-8G17*G827	=H17-8G17*H827	=I17-8G17*I827	=J17-8G17*J827	=K17-8G17*K827
27	5	x ₃ 4	=D18-8G18		=E18-8G18	=F18-8G18	=G18-8G18	=H18-8G18	=I18-8G18	=J18-8G18	=K18-8G18
28	next I	Z ₅			=E19-8G19*E827	=F19-8G19*F827	=G19-8G19*G827	=H19-8G19*H827	=I19-8G19*I827	=J19-8G19*J827	=K19-8G19*K827

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		i	B _i		2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
4			$\frac{C_i}{C_j}$		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄			x ₇
5	1	x ₅ 0	6000		1	1	1	1	1	0	0
6	2	x ₆ 0	10000		0	0	0	1	0	1	0
7	3	x ₇ 0	720		0,1	0,12	0,12	0,15	0	0	1
8	4	x ₈ 0	3500		0,4	0,65	0,56	0,7	0	0	0
9	5	x ₉ 0	1100		0,12	0,25	0,2	0,22	0	0	0
10	next I	Z ₇ 0			=E3	=F3	=G3	=H3	=I3	=J3	=K3
11											
12	i	B _i			2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
13			$\frac{C_i}{C_j}$		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄			x ₇
14	1	x ₅ 0	=D5-8H5*D815		=E5-8H5*E815	=F5-8H5*F815	=G5-8H5*G815	=H5-8H5*H815	=I5-8H5*I815	=J5-8H5*J815	=K5-8H5*K815
15	2	x ₄ 7,5	=D6-8F815		=E6-8F815	=F6-8F815	=G6-8F815	=H6-8F815	=I6-8F815	=J6-8F815	=K6-8F815
16	3	x ₇ 0	=D7-8H7*D815		=E7-8H7*E815	=F7-8H7*F815	=G7-8H7*G815	=H7-8H7*H815	=I7-8H7*I815	=J7-8H7*J815	=K7-8H7*K815
17	4	x ₃ 0	=D8-8F8*D815		=E8-8F8*E815	=F8-8F8*F815	=G8-8F8*G815	=H8-8F8*H815	=I8-8F8*I815	=J8-8F8*J815	=K8-8F8*K815
18	5	x ₉ 0	=D9-8H9*D815		=E9-8H9*E815	=F9-8H9*F815	=G9-8H9*G815	=H9-8H9*H815	=I9-8H9*I815	=J9-8H9*J815	=K9-8H9*K815
19	next I	Z ₅			=E10-8H10*E815	=F10-8H10*F815	=G10-8H10*G815	=H10-8H10*H815	=I10-8H10*I815	=J10-8H10*J815	=K10-8H10*K815
20											
21	i	B _i			2,45	3,5	4	7,5	0	0	0
22			$\frac{C_i}{C_j}$		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄			x ₇
23	1	x ₅ 0	=D14-8G14*D827		=E14-8G14*E827	=F14-8G14*F827	=G14-8G14*G827	=H14-8G14*H827	=I14-8G14*I827	=J14-8G14*J827	=K14-8G14*K827
24	2	x ₄ 7,5	=D15-8G15*D827		=E15-8G15*E827	=F15-8G15*F827	=G15-8G15*G827	=H15-8G15*H827	=I15-8G15*I827	=J15-8G15*J827	=K15-8G15*K827
25	3	x ₇ 0	=D16-8G16*D827		=E16-8G16*E827	=F16-8G16*F827	=G16-8G16*G827	=H16-8G16*H827	=I16-8G16*I827	=J16-8G16*J827	=K16-8G16*K827
26	4	x ₈ 0	=D17-8G17*D827		=E17-8G17*E827	=F17-8G17*F827	=G17-8G17*G827	=H17-8G17*H827	=I17-8G17*I827	=J17-8G17*J827	=K17-8G17*K827
27	5	x ₃ 4	=D18-8G18		=E18-8G18	=F18-8G18	=G18-8G18	=H18-8G18	=I18-8G18	=J18-8G18	=K18-8G18
28	next I	Z ₅			=E19-8G19*E827	=F19-8G19*F827	=G19-8G19*G827	=H19-8G19*H827	=I19-8G19*I827	=J19-8G19*J827	=K19-8G19*K827

9. Підведіть підсумки: сформууйте та в окремій чарунці Excel введіть відповідь до обраної та розв'язаної задачі; надайте практичні рекомендації щодо оптимізації сільськогосподарського виробництва.
10. Збережіть створений документ у Вашій папці диску D: із власним іменем *laboratorna_1.xlsx*.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздрукований на принтері результуючі документи, що отримані після виконання завдань – файли *laboratorna_1.docx* та *laboratorna_1.xlsx*.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Наведіть визначення понять «модель» та «моделювання».
2. Назвіть основні етапи моделювання
3. Суть задачі лінійного програмування?
4. Наведіть приклад задачі лінійного програмування, що може мати місце в агровиробництві та природокористуванні? Чи часто в екології виникають задачі лінійного програмування?
5. Якого вигляду може набувати цільова функція у ЗЛП?
6. Методи розв'язання задач лінійного програмування.
7. Алгоритм графічного способу розв'язування ЗЛП.
8. Сформулюйте задачу лінійного програмування, яка може бути розв'язана симплекс-методом.
9. Вкажіть основні етапи стандартної ітерації симплекс-методу.
10. Умова оптимальності в ЗЛМ при використанні симплекс-методу. За яких умов знайдений оптимальний план є єдиним?

Список рекомендованої літератури:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л.Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Браславец М.Е. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / М.Е.Браславец, Р.Г.Кравченко. – М.: Колос, 1972. – 589 с.
3. Булига К. Б. Комп'ютерний практикум із застосуванням математичних методів в економіці / К. Б. Булига, В.М. Міхайленко. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 67 с.
4. Волков В. А. Элементы линейного программирования / В.А. Волков. – М.: Просвещение, 1975. – 140 с.
5. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. – М.: Агропромиздат, 1990.
6. Калініченко А. В. Використання оптимального програмування при розв'язанні задач сільськогосподарського виробництва / А.В.Калініченко, К.Д.Костоглод, Н.М.Протас. – Полтава: Видавництво “ІнтерГрафіка”, 2004. – 101 с.
7. Кравченко Р. Г. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства / Р. Г. Кравченко, И. Г. Попов, С. З. Толпекин. – М.: Колос, 1973. – 527 с.
8. Курносов А. П. Вычислительная техника и экономико-математические методы в сельском хозяйстве / А.П. Курносов, А.П. Сысоев. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 301 с.
9. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.
10. Шелобаев С.И. Математические методы и модели / С.И.Шелобаев. – Москва: ЮНИТИ, 2000. – 368 с.

ТЕМА 2. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОМУ ВИРОБНИЦТВІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Тема: Розв'язування у середовищі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск рішення задач, що пов'язані з аграрним виробництвом й моделюються як задачі лінійного програмування

Мета: Навчитися використовувати засіб Поиск рішення табличного процесора Microsoft Excel для розв'язування оптимізаційних задач

Завдання:

1. Опанувати технологію застосування надбудови Поиск рішення табличного процесора Excel для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.
2. Засвоїти особливості розв'язання задач цілочислового програмування з використанням надбудови Поиск рішення на прикладі задачі мінімізації відходів.
3. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі аграрного виробництва засобом Поиск рішення Microsoft Excel та інтерпретувати результат.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

Математичне моделювання процесів, явищ і конструкцій складних систем перетворилось в інструмент аналізу великої кількості задач, а імітація на ПЕОМ функціонування складних систем є практично єдиним способом швидкого розв'язання досліджуваних проблем.

Сучасний етап розвитку аграрної науки характеризується активним пошуком шляхів досягнення сталого розвитку аграрного виробництва при впровадженні нових технологій виконання робіт і управління процесом формування врожаю і т.ін. з врахуванням умови збереження навколишнього середовища. Тобто, виникають задачі оптимізації виробництва в межах єдиної економіко-еколого-соціальної системи.

Для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування розроблено ряд методів. Проте, всі вони потребують проведення складних математичних розрахунків. Більше того, збільшення кількості невідомих та введення кількох десятків обмежень в задачі, що описують реальні виробничі процеси аграрної та інших галузей, зводить розв'язання оптимізаційних задач вручну на нівель. Тому для отримання оптимальних розв'язків доцільно використовувати можливості комп'ютерної техніки та відповідне програмне забезпечення. В такому разі від фахівців певної прикладної галузі (екологія, економіка, техніка тощо) не вимагається пам'ятати кроки алгоритмів відповідних математичних методів. Все, що потрібно вміти спеціалісту – здійснювати постановку задачі, скласти моделі, обирати програмні продукти серед наявних.

На сьогодні існує безліч програм для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування. Це – спеціальні пакети для математичних розрахунків, такі як MAPLE, Mathcad, MathLAB тощо. Багато програм є у вільному доступі в мережі інтернет. Розроблені сайти, що дозволяють виконувати математичні розрахунки.

На сьогодні більшість користувачів ПК користуються у своїй роботі пакетом прикладних програм загального призначення Microsoft Office (або Open Office). Табличний процесор Microsoft Excel дозволяє вирішувати широке коло математичних, статистичних і інших задач. До Excel звертаються в будь-якій ситуації, що вимагає роботи з цифрами. Цю програму можна однаково успішно використовувати як для обробки одного стовпчика з числами, так і для складання складної моделі бюджету. Крім того, за допомогою вбудованих в програму засобів можна ілюструвати цифри “виразними” діаграмами. Excel можна також використовувати в якості програми для ведення бази даних і створення стандартної форми для збору і реєстрації даних.

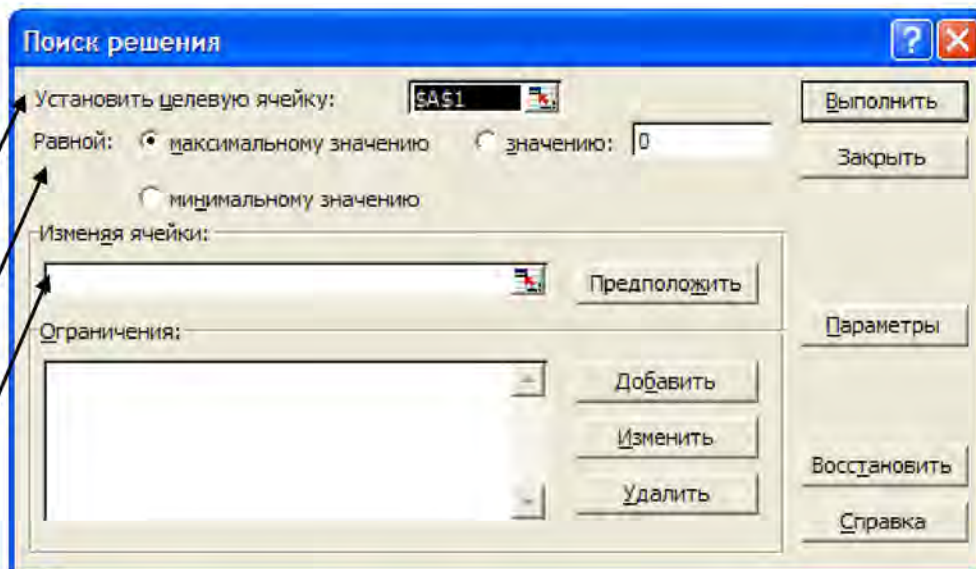
Excel надає можливість розв'язувати задачі лінійного та нелінійного програмування.

Не дивлячись на значну різноманітність оптимізаційних задач, MS Excel пропонує єдиний потужний інструмент для їх розв'язання – надбудову **Поиск решения (Solver)**. *Поиск решения дозволяє розв'язувати оптимальні задачі трьох типів – лінійні, нелінійні та цілочисельні.* Користувачу потрібно лише грамотно сформулювати задачу, а Excel знайде оптимальний розв'язок – найкращий варіант використання обмежених ресурсів, що забезпечить максимальне чи мінімальне значення функції цілі.

Щоб застосувати Поиск решения для розв'язання задачі, необхідно записати розв'язувану задачу в математичному вигляді, а потім – подати її в електронних таблицях у термінах табличного процесора – визначити змінювані комірки (комірки, відведені для шуканих змінних), визначити обмеження, що будуть враховуватись у процесі аналізу, та визначити цільову комірку (комірку із формулою цільової функції).

АЛГОРИТМ розв'язання задачі за допомогою ПОИСК РЕШЕНИЯ:

- в окремі чарунки ввести вхідні дані;
- відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
- в окрему чарунку записати формулу для лівої частини першого обмеження, а в іншу чарунку – значення правої частини першого обмеження (вільний член b_1).
- за аналогією в окремі чарунки записати формули для лівої та значення b_i правої частини кожного наступного обмеження*;
- в окрему чарунку записати формулу для цільової функції*;
- встановити курсор у чарунку із цільовою функцією та виконати команду Сервис⇒Поиск решения (у версіях Microsoft Office 2007 і вище, слід на стрічці Данные обрати команду Поиск решения) й у діалоговому вікні Поиск решения (див. рис.) встановити необхідні опції**:



- у полі Установить целевую ячейку ввести адресу чарунки, що містить формулу цільової функції, або ж виділити її натисканням ЛКМ;
- в області Равной встановити перемикач ☒ максимальному значенню або ☐ мініимальному значенню, в залежності від умови задачі (задача на *max* чи на *min*). Якщо згідно умови задачі цільова функція має досягти конкретного значення, то слід встановити перемикач ☐ значенню та у відповідне поле ввести задане значення;
- натиснути ЛКМ у рядку введення Изменяя ячейки і ввести адресу діапазону чарунок, відведених для результату (або ж виділити ці змінювані чарунки на робочому аркуші)***. Поиск решения буде

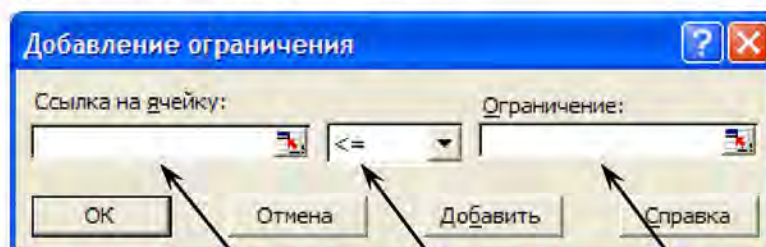
* При записі формул врахувати, що їх можна або вводити вручну, або скористатися Майстром функцій. Але у будь-якому разі у формулі мають міститися посилання на чарунки, відведені для результату.

** виклад вікна Поиск решения у нових версіях Microsoft Office буде дещо відрізнятись.

*** кількість змінних – не більше 200

підбирати значення даних комірок, поки не знайде розв'язок. Якщо ж на даному етапі не вказувати ніякі чарунки, а натиснути кнопку **Предположить**; то система буде автоматично здійснювати пошук чарунок електронної таблиці, що містять певні значення (а не формули), які могли б впливати на значення цільової функції;

- у полі Ограничення натиснути кнопку **Добавить**;
- у вікні **Добавление ограничения**



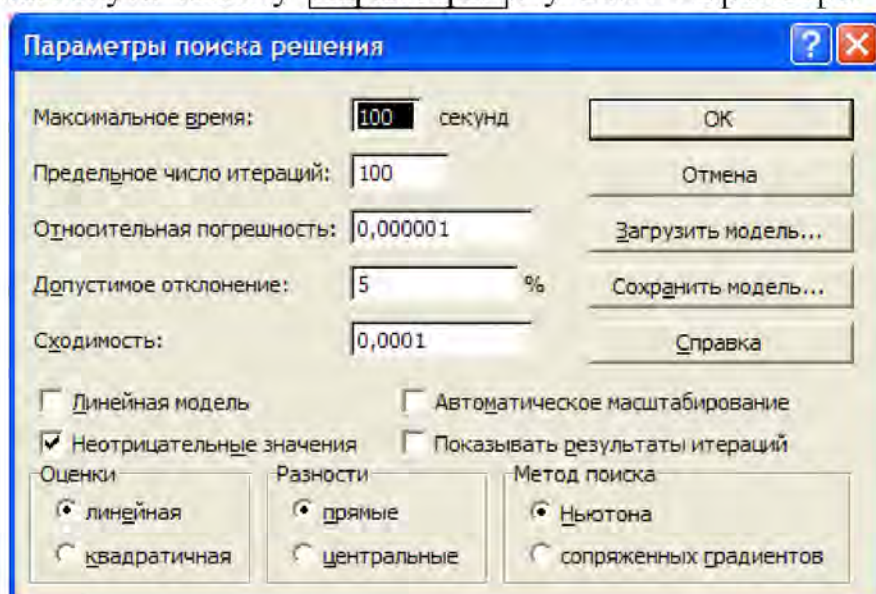
у полі **Ссылка на ячейку** ввести адресу чарунки із формулою лівої частини першого обмеження (або виділити цю чарунку), обрати із закритого списку знак обмеження й у полі **Ограничение** ввести значення правої частини першого обмеження або ж вказати адресу відповідної чарунки. При необхідності введення інших обмежень слід натиснути кнопку **Добавить** і за аналогією ввести друге обмеження, повторюючи описані дії, третє, і т.д. Після введення всіх обмежень** слід натиснути кнопку **OK**;

- у результаті виконання попередньої дії у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения** будуть відображатись всі обмеження задачі. Якщо при записі певного обмеження були допущені помилки, то для їх усунення натисканням ЛКМ слід виділити обмеження, натиснути кнопку **Изменить** та внести корективи до обмеження. Натискання кнопки **Удалить** дозволяє вилучити виділене обмеження;

- при потребі натиснути кнопку **Параметры** й у вікні **Параметры**

поиска решений задати додаткові параметри*** для розв'язання задачі;

- натиснути кнопку **Выполнить**.



** не більше 500, якщо задача нелінійна

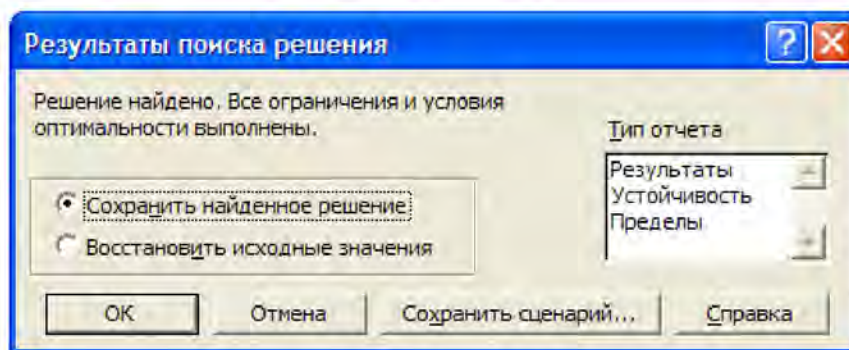
*** короткий опис параметрів подано на рис

Якщо натиснути кнопку **Закрити**, то розв'язання задачі при цьому виконуватись не буде; вікно Поиск рішення закриється, але всі опції, задані у даному вікні, будуть автоматично збережені та відображатимуться при наступному відкритті даного вікна.

Якщо ж виконані установки не задовольняють користувача, то натискання кнопки **Восстановить** очищає діалогове вікно Поиск рішення і відображає його у початковому викладі із опціями, заданими системою за замовчуванням;

- проаналізувати результат пошуку розв'язку задачі та у діалоговому вікні Результаты поиска решений обрати опцію ☒ Сохранить найденное решение.

Якщо у вікні Результаты поиска решений обрати опцію ☒ Восстановить исходные значения, то у чарунках електронних таблиць результат розв'язання задачі виводитись не буде; в них будуть відображатись початкові значення.



- у разі потреби створення звітів за результатами розв'язку задачі, необхідно у діалоговому вікні Результаты поиска решений натисканням ЛКМ у полі Тип отчета виділити потрібні типи звітів (вони будуть виводитись на окремих аркушах робочої книги, доданих автоматично);
- натиснути **ОК**;
- проаналізувати результат та здійснити економічну інтерпретацію отриманого розв'язку.

Порядок і методика виконання завдань

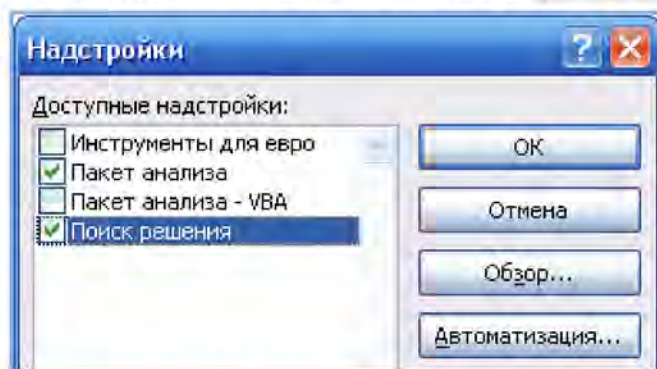
1. Опанувати технологію застосування надбудови Поиск решения табличного процессора Excel для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.

Розв'язання задачі лінійного чи нелінійного програмування із використанням програмних засобів, у тому числі й табличного процесора Microsoft Excel, починають із дослідження предметної області, постановки та математичного формулювання задачі.

Після побудови моделі задачі, необхідно:

- завантажити табличний процесор Microsoft Excel;
- в окремі чарунки ввести вхідні дані задачі;
- відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
- почергово в окремі чарунки записати формули лівих та значення правих частин кожного обмеження. При записі формул врахувати, що їх можна або вводити вручну, або скористатися Майстром функцій. Але у будь-якому разі у формулі мають міститися посилання на чарунки, відведені для шуканих значень невідомих;
- в окрему чарунку записати формулу для цільової функції*;
- встановити курсор у чарунку із цільовою функцією та виконати команду Сервіс⇒Поиск решения (у версіях Microsoft Office 2007 і вище, слід на

стрічці Данные обрати команду  Поиск решения).



За відсутності такої команди необхідно попередньо активізувати (увімкнути) надбудову Поиск решения за командою Сервіс⇒Надстройки⇒Поиск решения (Файл⇒Параметры⇒Надстройки ⇒ Перейти ⇒ Поиск решения);

- у діалоговому вікні Поиск решения заповнити необхідні поля (вказати адресу чарунки з цільовою функцією; напрямок екстремуму; адреси чарунок, відведених для шуканих значень невідомих; увести обмеження та задати умову невід’ємності);
- натиснути кнопку **Выполнить** та проаналізувати результат;
- зберегти результати розрахунків і надати практичні рекомендації виробництву.

2. Засвоїти особливості розв’язання задач цілочислового програмування з використанням надбудови Поиск решения на прикладі задачі мінімізації відходів

При розв’язанні певних задач аграрного та промислового виробництва часто виникають задачі оптимізації використання певних ресурсів, при яких результат (шукані значення невідомих) має бути цілим числом. Такі задачі, в яких необхідно знайти оптимум при обмежених ресурсах, у яких шукані невідомі приймають сталі (цілі) значення називають цілочисловими. Відповідно, методи розв’язання таких задач – відносять до розділу математичного програмування, який називають – **цілочислове програмування**.

Для розв’язання задач цілочислового програмування можна використовувати алгоритми відповідних математичних методів.

Інший варіант – розв’язувати такі задачі на ПК, наприклад – у табличному процесорі Microsoft Excel за технологією ручного проведення розрахунків, але, після отримання результату необхідно додатково проводити округлення значень змінних. Але такий шлях розв’язання задач є достатньо трудомістким і хибним, оскільки при округленні значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ необхідно дотримуватись не правил математики з округлення чисел, а ще й слідкувати за дотриманням умов обмежень щодо використання ресурсів і умови екстремуму цільової функції.

Розв’язуючи задачі у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения, можна задати додаткове обмеження по цілочисельності розв’язку. Для цього у вікні Поиск решения в області Ограничения слід натиснути кнопку **Добавить** і ввести обмеження, що шукані невідомі повинні бути цілими (рис. 2.1)

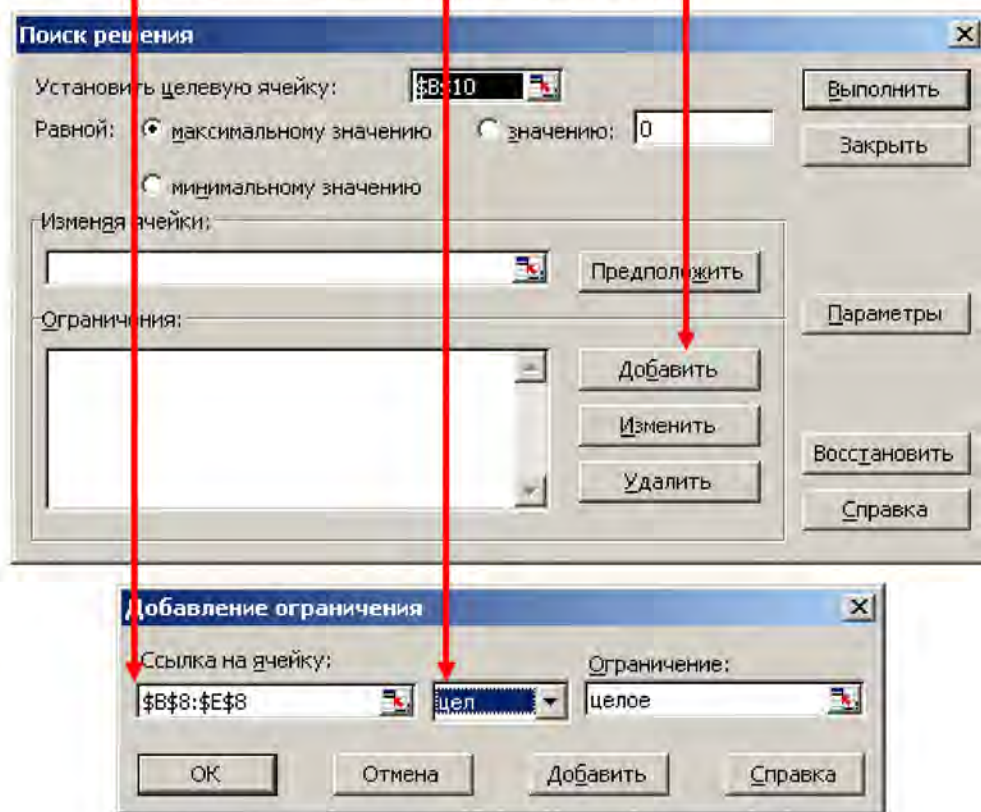


Рис. 2.1. Умова цілочисельності розв’язку

Подальша технологія розв’язання задач цілочислового програмування – не відрізняється від розв’язання інших оптимізаційних задач.

До задач цілочислового програмування можна віднести частину задач (але не всі!) оптимального розкрою матеріалів. Суть таких задач полягає у тому, що слід підібрати (оптимізувати) способи розкрою певної кількості вихідного матеріалу m видів, які можна розкроїти n способами для виготовлення певної кількості заготовок k видів. Тобто із обмеженої кількості вихідного матеріалу треба забезпечити потреби у заготовках (деталях, комплектах чи т.п.) у повному обсязі так, щоб використати мінімальну кількість початкового матеріалу (відповідно, щоб відходи були мінімальними).

3. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі аграрного виробництва засобом Поиск решения Microsoft Excel та інтерпретувати результат.

Оптимізаційні задачі аграрного виробництва, як то оптимізації структури посівних площ та сівозмін сільськогосподарських культур, оптимального виробництва та застосування кормів, оптимального розподілу мінеральних і органічних добрив, оптимізації складу та застосування машинно-тракторно парку, оптимального співвідношення галузей у сільськогосподарському підприємстві, оптимізації кормових раціонів тварин, структури та обороту стада тощо, розв'язують як задачі лінійного програмування будь-якої іншої галузі. Головне – здійснити правильну постановку задачі: побудувати цільову функцію, обмеження задачі і умову невід'ємності змінних:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr} \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

При постановці задачі слід записати обмежені ресурси, що забезпечують екологічнобезпечне господарювання з урахуванням агрономічних, економічних, соціальних факторів; зоотехнічних, інженерних та інших норм відповідно. Надалі задача розв'язується або за алгоритми відповідних математичних методів вручну, або з використанням прикладних програм, що є доцільнішим.

Якщо для розв'язання ЗЛП аграрного виробництва обрано табличний процесор Microsoft Excel, то технологія отримання результату не залежить від галузі, до якої відноситься задача. Зокрема, після побудови моделі задачі, в середовищі Microsoft Excel слід:

- в окремі чарунки ввести вхідні дані задачі;
- відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
- по чергові в окремі чарунки записати формули лівих та значення правих частин кожного обмеження;
- в окрему чарунку записати формулу для цільової функції;
- виконати дію **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения**
- встановити необхідні опції у вікні **Поиск решения** і натиснути **Выполнить**;
- здійснити інтерпретацію отриманого результату, або ж при потребі скорегувати модель і розв'язати задачу з новими вхідними даними.

4. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл laboratorna_2.xlsx.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Вправа 1. Опанувати технологію застосування надбудови Поиск решения табличного процесора Excel для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування

1. Пригадайте підходи до розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування.
2. Назвіть відомі Вам програмні засоби для розв'язання задач лінійного (нелінійного) програмування.
3. Укажіть переваги використання програмних засобів для розв'язання оптимізаційних задач.
4. Сформулюйте алгоритм розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування із використанням надбудови Поиск решения табличного процесора Excel.
5. Ознайомтеся з умовою задачі оптимізації посівних площ і побудуйте модель задачі.

Приклад 1.

У господарстві планується посіяти пшеницю, ячмінь, кукурудзу та горох на площі, яка не перевищує 1000 га, в тому числі пшениці – на площі не більше 30 % загальної посівної площі, а гороху – не менше 50 га. Затрати праці на 1 га кожної з означених культур становлять відповідно – 5, 4, 16 та 4 люд.-днів та 0,5, 0,6, 4 та 0,4 тракторо-змін. При вирощуванні та збиранні урожаю цих культур в господарстві може бути відпрацьовано до 8500 люд.-днів та 1750 тракторо-змін. Визначити такі площі посіву вказаних культур, щоб обсяг валової продукції у грошовому виразі був максимальним.

Урожайність пшениці планується 32 ц/га, ячменю – 24 ц/га, кукурудзи – 40 ц/га, гороху – 26 ц/га. Середня закупівельна ціна пшениці – 3400 грн/т, ячменю – 2750 грн/т, кукурудзи – 2300 грн/т, гороху – 1500 грн/т.

Врахувати, що для власних потреб господарству потрібно кукурудзи не менше 12000 ц.

Математичне формулювання:

Нехай, x_1 – площа посіву пшениці, га
 x_2 – площа посіву ячменю, га
 x_3 – площа посіву кукурудзи на зерно, га
 x_4 – площа посіву гороху, га

Цільова функція

$$Z = 32 \cdot 640 \cdot x_1 + 24 \cdot 275 \cdot x_2 + 40 \cdot 230 \cdot x_3 + 26 \cdot 150 \cdot x_4 \rightarrow \max$$

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1000 \\ x_1 \leq 0,3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_4 \geq 50 \\ 5x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 4x_4 \leq 8500 \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 + 4x_3 + 0,4x_4 \leq 1750 \\ 40x_3 \geq 12000 \end{cases}$$

Умова невід'ємності

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

6. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel.
7. Надайте аркушу Лист 1 назву Приклад 1, аркушу Лист 2 назву Приклад 2., аркушу Лист 3 назву Приклад 3.
8. Розв'яжіть сформовану задачу оптимізації посівних площ – *Приклад 1* за допомогою засобу Поиск решения, дотримуючись вказівок.
 - Вихідні дані до задачі введіть в чарунки B1:F6 (рис. 2.2).
 - Чарунки C8:F8 залиште пустими. Але майте на увазі, що в подальшій роботі в них буде занесено результат розв'язання задачі (шукані значення невідомих) – площі сільськогосподарських культур.
 - У чарунки B8, B10:B11, B13:B19 уведіть роз'яснюючий текст (є необов'язковим для розв'язання задачі)

	A	B	C	D	E	F
1		Вихідні дані:				
2		Показники	пшениця	ячмінь	кукурудза	горох
3		Урожайність, ц/га	32	24	40	26
4		Затрати праці, люд.-днів	5	4	16	4
5		Затрати праці, тракторо-змін	0,5	0,6	4	0,4
6		Закупівельна ціна, грн./ц	340	275	230	150
7						
8		Площа, га				
9						
10		Валова продукція, грн	0	0	0	0
11		Сумарна валова продукція, грн	0			
12						
13		Обмеження:				
14		по загальній площі, га	0	<=	1000	
15		по площі пшениці у структурі посівів, га	0	<=	0	
16		по площі гороху	0	>=	50	
17		по затратах праці, люд.-днів	0	<=	8500	
18		по затратах праці, тракторо-змін	0	<=	1750	
19		по валовому збору кукурудзи, ц	0	>=	12000	

Рис.2.2. Аркуш Приклад 1 – вхідні дані до задачі

- У чарунки C10:F10 запишіть формули для обчислення валової продукції у грошовому виразі по кожній із культур.
- У чарунку C11 запишіть формулу для обчислення функціоналу – сумарної валової продукції.
- У чарунки C14:C19 запишіть формули, які моделюють ліву частину обмежень.
- У чарунки D14:D19 відповідно запишіть знаки в обмеженнях (що не є обов'язковим).
- У чарунки E14:E19 відповідно запишіть праву частину обмежень (рис. 2.3).

	A	B	C	D	E	F
1	Вихідні дані:					
2		Показники	пшениця	ячмінь	кукурудза	горох
3		Урожайність, ц/га	32	24	40	26
4		Затрати праці, люд.-днів	5	4	16	4
5		Затрати праці, тракторо-змін	0,5	0,6	4	0,4
6		Закупівельна ціна, грн./ц	340	275	230	150
7						
8		Площа, га				
9						
10		Валова продукція, грн	=C3*C6*C8	=D3*D6*D8	=E3*E6*E8	=F3*F6*F8
11		Сумарна валова продукція, грн	=СУММ(C10:F10)			
12						
13		Обмеження:				
14		по загальній площі, га	=СУММ(C8:F8)	<=	1000	
15		по площі пшениці у структурі посівів, га	=C8	<=	=0,3*(C8+D8+E8+F8)	
16		по площі гороху	=F8	>=	50	
17		по затратах праці, люд.-днів	=СУММПРОИЗВ(C4:F4;C8:F8)	<=	8500	
18		по затратах праці, тракторо-змін	=СУММПРОИЗВ(C5:F5;C8:F8)	<=	1750	
19		по валовому збору кукурудзи, ц	=E3*E8	>=	12000	

Рис.2.3. Аркуш **Приклад 1** – вхідні дані та формули до задачі

- Відформатуйте чарунки аркушу за зразком, наведеному на рис. 2.2, рис. 2.3 (задайте типи шрифтів, рамки, заливку).
- Встановіть курсор в чарунку, де буде записане значення цільової функції – чарунка C11.
- На стрічці Данные оберіть команду Поиск решения (у більш старіших версіях Office виконайте команду Сервис⇒Поиск решения*).
- У вікні Параметры поиска решения (рис. 2.4):
 - = перевірте адресу чарунки цільової функції (для даного прикладу \$C\$11);
 - = у полі Равной встановіть перемикач максимальному значенню;
 - = введіть у поле Изменяя ячейки діапазон чарунок, значення яких розраховуються (в даному прикладі \$C\$8:\$F\$8);

* Якщо система видасть повідомлення про відсутність такої можливості, – виконати команду Файл⇒Параметры⇒Надстройки⇒Перейти⇒Поиск решения (команду Сервис⇒Надстройки...⇒Поиск решения).

Рис. 2.4. Параметры для розв'язання задачі –
вікно **Параметры Поиска решений**

- = встановіть курсор у поле Ограничения: і натисніть кнопку **Добавить**. У вікні **Добавление ограничения** введіть посилання* на чарунку **\$C\$14**, виберіть знак обмеження **<=**, запишіть посилання на чарунку **\$E\$14** в якості правої частини обмеження і натисніть кнопку **Добавить**. У наступному вікні **Добавление ограничения** по аналогії введіть наступне обмеження і т.д. Після введення останнього обмеження у вікні **Добавление ограничения** натисніть кнопку **ОК**;
- = увімкніть селектор ☒ **Сделать переменные без ограничений неотрицательными** (натисніть кнопку **Параметры**, у вікні **Параметры поиска решения** встановіть перемикач **Неотрицательные значения** і натисніть кнопку **Ok**);
- = натисніть кнопку **Найти решение** (кнопку **Выполнить**).

* Посилання на чарунки можна виконувати натисканням ЛКМ на відповідній чарунці.

- У вікні Результати поиска решений встановіть перемикач Сохранить найденные решения і натисніть кнопку **ОК**.
- 9. Проаналізуйте результат розв'язання **Прикладу 2**. Значення показників, що вимірюються в грошових одинцях заокругліть до двох знаків після коми, всі інші – до одного знаку після коми.
- 10. Сформулюйте висновок і збережіть документ у Вашій папці диску D:\ з іменем *laboratorna_2.xlsx*.

Вправа 2. Засвоїти особливості розв'язання задач цілочислового програмування з використанням надбудови Поиск решения на прикладі задачі мінімізації відходів

1. Ознайомтеся з умовою задачі цілочислового програмування з мінімізацією відходів.

Приклад 2.

Для збору врожаю яблук господарству із розвиненою галуззю садівництва необхідно збільшити кількість наявної тари, а саме – ящиків. Для їх майстрування із тарної дошки стандартної довжини 3 метри, необхідно зробити заготовки довжиною 0,7 м та 0,5 у кількості відповідно не менше 1400 та 600 штук.

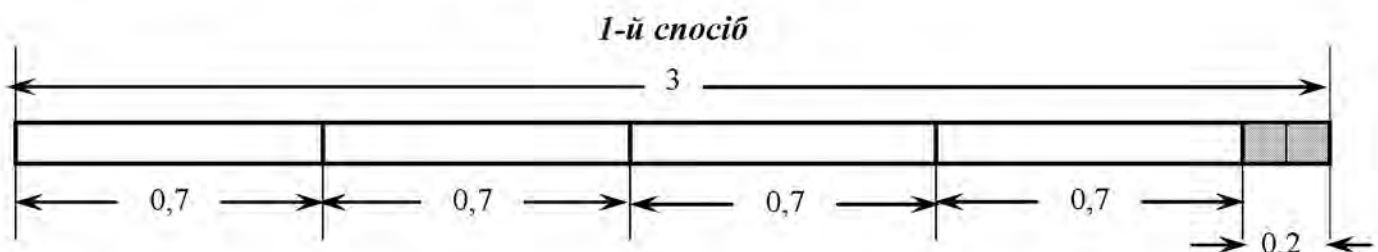
Визначити скільки штук тарних дощок стандартного розміру 3 метри потрібно та яким способом його необхідно порізати, щоб отримати не менше ніж задану кількість заготовок при мінімальних відходах.

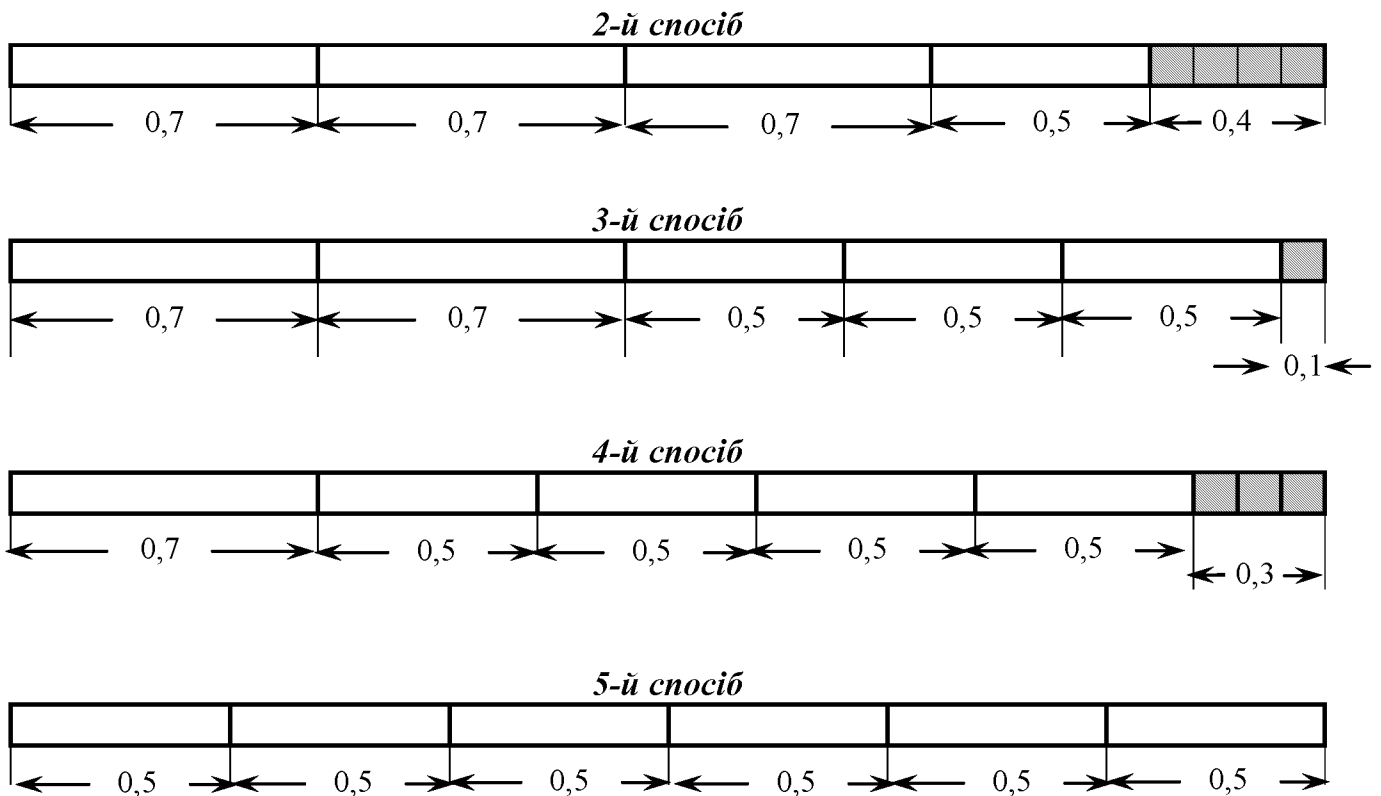
2. Побудуйте математичну модель задачі оптимізації розкрою матеріалів

Математичне формулювання:

Дана задача відноситься до задач розкрою матеріалів.

Щоб записати умову задачі в математичній формі спочатку треба скласти схему можливих варіантів отримання заготовок із штахетнику стандартного розміру (вказати способи розкрою матеріалу).





Таким чином, відповідно до наведеного малюнка маємо п'ять способів порізки тарних дощок (див.табл.), а, відповідно, і п'ять невідомих:

Показники	1-й спосіб	2-й спосіб	3-й спосіб	4-й спосіб	5-й спосіб
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Заготовки довжиною 0,7 м	4	3	2	1	0
Заготовки довжиною 0,5 м	0	1	3	4	6
Відходи, м	0,2	0,4	0,1	0,3	0

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – кількість стандартних дощок, що необхідно порізати відповідно 1-м, 2-м, 3-м, 4-м та 5-м способом.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases}
 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 \geq 1400 \\
 0x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 \geq 600 \\
 x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}
 \end{cases}$$

$$Z = 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,1x_3 + 0,3x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

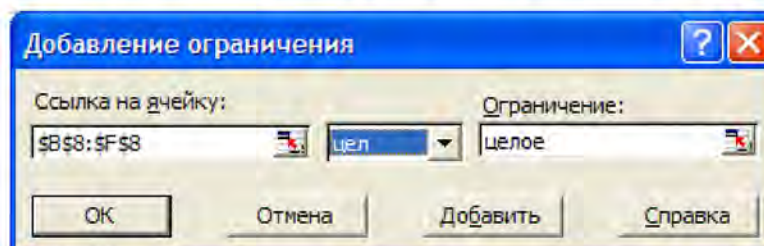
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

3. Розв'яжіть сформовану задачу оптимізації розкрою матеріалів – **Приклад 2** за допомогою засобу **Поиск решения**, дотримуючись вказівок:
 - Активізуйте аркуш **Приклад 2** табличного документу *laboratorna_2.xlsx*.
 - Уведіть вихідні дані до запропонованої задачі розкрою матеріалів **Приклад 2**;
 - У чарунку **D11** уведіть формулу лівої частини першого обмеження, використовуючи вбудовану функцію **=СУММПРОИЗВ()** та абсолютні посилання на чарунки, відведені для результату **\$B\$8:\$F\$8** (рис. 2.5).
 - Скопіюйте введену формулу, використовуючи засіб Автозаповнення на чарунки **D12: D13**.
 - В окремі чарунки введіть знаки та значення правих частин кожного обмеження.

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	Способи порізки тарних дощок довжиною 3 м					
2						
3		1-й спосіб	2-й спосіб	3-й спосіб	4-й спосіб	5-й спосіб
4	заготовки по 0,7 м	4	3	2	1	0
5	заготовки по 0,5 м	0	1	3	4	6
6	Відходи, м	0,2	0,4	0,1	0,3	0
7						
8	Кількість тарних дощок	266	0	168	0	204
9						
10	Обмеження задачі	Потрібна кількість заготовок				
11	по кількості заготовок розміром 0,7 м	=СУММПРОИЗВ(B4:F4;\$B\$8:\$F\$8)		>=	1400	
12	по кількості заготовок розміром 0,5 м	=СУММПРОИЗВ(B5:F5;\$B\$8:\$F\$8)		>=	600	
13	Мінімальні відходи, м	=СУММПРОИЗВ(B6:F6;\$B\$8:\$F\$8)		-->	min	

Рис.2.5. Аркуш **Приклад 2** – вхідні дані та формули до задачі

- Активізуйте чарунку **D13** та виконайте команду **Данные⇒Поиск решения** (у більш ранніх версіях Office - команду **Сервис⇒Поиск решения**).
- У вікні **Параметры поиска решения**, що з'явиться на екрані, задайте потрібні опції у вікні.
- У полі **В соответствии с ограничениями** вікна **Параметры поиска решения** натисніть кнопку **Добавить** і додайте обмеження цілочисельності розв'язку – кількість дощок має бути цілим числом **OK**.



- натисніть кнопку **Найти решение** (кнопку **Выполнить**) для ініціалізації розв'язання задачі та збережіть отримане рішення.

4. Проаналізуйте отриманий розв'язок *Прикладу 2*.
5. Очистіть діапазон чарунок B8:F8.
6. Активізуйте засіб Поиск решения для повторного розв'язання задачі, не змінюючи ніяких опцій у відповідному вікні. Проаналізуйте, як зміниться результат – значення шуканих змінних і значення цільової функції.
7. Повторіть п.4 та п.5.
8. Пересвідчіться, скільки оптимальних розв'язків має *Приклад 2*.
9. Прийміть рішення щодо розв'язку задачі. Сформулюйте відповідь до розв'язаної задачі оптимізації розкрою матеріалів та надайте практичні рекомендації виробництву.
10. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_2.xlsx*.

Вправа 3. Навчитися розв'язувати оптимізаційні задачі аграрного виробництва засобом Поиск решения Microsoft Excel та інтерпретувати результат

1. Ознайомтеся з умовою задачі з оптимізації поєднання галузей в аграрному підприємстві.

Приклад 3.

У фермерському господарстві, що спеціалізується на виробництві зерна, овочів та молока, земельні ресурси складаються з 500 га ріллі, 60 га пасовищ і 30 га природних сінокосів. Продуктивність пасовищ і сінокосів становить 110 і 25 ц/га.

Трудові ресурси та технічна оснащеність господарства дозволяють відпрацювати упродовж року 20600 людино-днів і 3080 машино-змін, у т.ч. в напружений період (з середини липня по середину вересня) – 5800 людино-днів і 750 машино-змін. Прямі витрати праці на 1 га пасовищ і природних сінокосів плануються 2,8 і 4,2 люд.-днів відповідно, у т.ч в напружений період – 1,1 і 1,4 люд.-днів. На механізований обробіток 1 га сінокосів планується витратити 0,8 машино-змін.

Витрати виробничих ресурсів на одиницю галузі, що розвиваються в господарстві, урожайності с.-г. культур, собівартості продукції та прогнозні ціни її реалізації наведені в табл. 2.1.

Визначити таке поєднання галузей в господарстві, при якому максимізується прибуток як різниця між сумою грошових надходжень від реалізації продукції та її собівартістю.

Таблиця 2.1.

Вихідні дані до Прикладу 3

Показники	На 1 га										На 1 корову
	пшениця озима	ячмінь	овочі на продаж	ярі фуражні	багаторічні трави		однорічні трави		силосні культури	кормові коренеплод	
					на з.к.	на сіно	на з.к.	на сіно			
Витрати праці, люд.-дн. :											
усього	5	4	54	4,5	5,2	4,2	4,8	4,1	8,4	48	62
у напруж.період	1,2	1,2	15	0,5	0,8	0,6	0,7	0,6	1,1	6,7	18
Витрати мехресурсів, маш.-змін:											
усього	1,4	1,4	11,2	0,8	1	1,2	1	1	2,2	4,4	5,6
у напруж.період	0,35	0,45	3,4	0,2	0,25	0,3	0,25	0,25	0,48	0,98	1,04
Урожайність, ц/га	46,2	32,4	260	32	110	30	95	25	180	350	×
Собівартість 1 ц, грн.	210	216	262								
Ціна реалізації 1 ц, грн.	340	382	414								

При оптимізації поєднання галузей врахувати з урахуванням наведених нижче вимог:

- обсяги реалізації пшениці озимої, ячменю та овочів плануються не меншими 693, 200, та 3120 т відповідно;
- молока необхідно реалізувати не менше 860 т при собівартості 28,62 грн./т і річному надої від однієї корови рівному 48,5 ц. Запланована продуктивність може бути досягнута при забезпеченні однієї корови 52 ц корм.од. і 5,6 ц перетравного протеїну на рік;
- мінімальні річні фізіологічні норми згодовування окремих груп кормів (ц корм.од.) повинні бути такими: концентровані корми – 7,92, грубі – 14,2, зелені – 19,6, соковиті – 7,85;
- окрім молока господарство планує отримати у середньому від корови ще й 0,4 ц м'яса собівартістю 2830,7 грн./ц. Прогнозні ціни реалізації 1 ц молока та м'яса в регіоні становлять відповідно 420,8 та 4412,5 грн.;
- при плануванні величин площ висіву кормових культур слід врахувати, що: а) під багаторічні та однорічні трави треба виділити не менше 78 га ріллі, б) площі під силосні культури повинні бути такими, щоб забезпечувати галузь тваринництва силосом не менше, ніж кормовими коренеплодами;
- господарство може придбати не більше 28 т комбікормів вартістю 1860 грн./т (1 ц комбікормів містить 0,9 ц корм.од. і 0,096 ц перетравного протеїну);
- у господарстві повинен бути річний страховий фонд кормів обсягом 500 ц корм.од. і 50 ц перетравного протеїну;
- при плануванні величин обсягів виробництва кормів для галузі тваринництва слід використати дані щодо поживності окремих видів с.-г. культур, що наведені нижче

С.-г. культури	Продукція основна і побічна	Міститься в 1 ц		Співвідношення основної та побічної продукції	С.-г. культури	Продукція основна і побічна	Міститься в 1 ц		Співвідношення основної та побічної продукції
		корм. од., ц	перетравного протеїну, кг				корм. од., ц	перетравного протеїну, кг	
Пшениця озима	зерно	1,19	12,0	1 : 1	Однорічні трави	зелені корми	0,18	4,1	x
	солома	0,20	0,5			сіно	0,51	7,2	
Ячмінь	зерно	1,13	8,0	1 : 1	Кукурудза	силос	0,20	1,5	x
	солома	0,33	1,3			коренеплоди	0,12	1,0	
Фуражні ярі	зерно, боби	1,17	19,5	1 : 1,5	Кормові коренеплоди	гичка	0,10	1,8	1 : 0,1
	сіно	0,30	3,5			зелені корми	0,20	2,5	
Багаторічні трави	зелені корми	0,20	2,2	x	Трави пасовищ	зелені корми	0,20	2,5	x
	сіно	0,46	6,5			сіно	0,48	6,8	
					Природні сінокосяки	сіно	0,48	6,8	x

2. Ознайомтеся з технологією побудови математичної моделі задачі з оптимізації поєднання галузей в аграрному підприємстві

Математичне формулювання:

Побудову математичної моделі почнемо з позначення шуканих змінних.
Нехай:

- x_1 – площа під пшеницю озиму, га;
- x_2 – площа під ячмінь, га;
- x_3 – площа під овочі на продаж, га;
- x_4 – площа під ярі фуражні культури, га;
- x_5 – площа під багаторічні трави на зелені корми, га;
- x_6 – площа під багаторічні трави на сіно, га;
- x_7 – площа під однорічні трави на зелені корми, га;
- x_8 – площа під однорічні трави на сіно, га;
- x_9 – площа під силосні культури (кукурудзу на силос), га;
- x_{10} – площа під кормові коренеплоди, га;
- x_{11} – поголів'я корів, голів;
- x_{12} – обсяг закуплених комбікормів, ц.

Математична модель задачі має вигляд:

Система обмежень:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 500$ (га);
- 2) $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 78$ (га);
- 3) $5x_1 + 4x_2 + 54x_3 + 4,5x_4 + 5,2x_5 + 4,2x_6 + 4,8x_7 + 4,1x_8 + 8,4x_9 + 48x_{10} + 62x_{11} + 2,8 \times 60 + 4,2 \times 30 \leq 21106$ (люд.-дн.), або
 $5x_1 + 4x_2 + 54x_3 + 4,5x_4 + 5,2x_5 + 4,2x_6 + 4,8x_7 + 4,1x_8 + 8,4x_9 + 48x_{10} + 62x_{11} \leq 20306$ (люд.-дн.);
- 4) $1,2x_1 + 1,2x_2 + 15x_3 + 0,5x_4 + 0,8x_5 + 0,6x_6 + 0,7x_7 + 0,6x_8 + 1,1x_9 + 6,7x_{10} + 18x_{11} + 1,1 \times 60 + 1,4 \times 30 \leq 5800$ (люд.-дн.), або
 $1,2x_1 + 1,2x_2 + 15x_3 + 0,5x_4 + 0,8x_5 + 0,6x_6 + 0,7x_7 + 0,6x_8 + 1,1x_9 + 6,7x_{10} + 18x_{11} \leq 5692$ (люд.-дн.);

- 5) $1,4x_1 + 1,4x_2 + 11,2x_3 + 0,8x_4 + x_5 + 1,2x_6 + x_7 + x_8 + 2,2x_9 + 4,4x_{10} + 5,6x_{11} + 0,1x_{12} + 0,8 \times 30 \leq 3080$ (маш.-зм.), або
 $1,4x_1 + 1,4x_2 + 11,2x_3 + 0,8x_4 + x_5 + 1,2x_6 + x_7 + x_8 + 2,2x_9 + 4,4x_{10} + 5,6x_{11} + 0,1x_{12} \leq 3056$ (маш.-зм.);
- 6) $0,35x_1 + 0,45x_2 + 3,4x_3 + 0,2x_4 + 0,25x_5 + 0,3x_6 + 0,25x_7 + 0,25x_8 + 0,48x_9 + 0,98x_{10} + 1,04x_{11} \leq 750$ (маш.-зм.);
- 7) $46,2x_1 \geq 6930$ (ц);
- 8) $32,4x_2 \geq 2000$ (ц);
- 9) $260x_3 \geq 31200$ (ц);
- 10) $48,5x_{11} \geq 8600$ (ц);
- 11) $32 \times 1,17x_4 + 0,9x_{12} \geq 7,92x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-37,44x_4 + 7,92x_{11} - 0,9x_{12} \leq 0$ (ц корм.од.);
- 12) $46,2 \times 0,2x_1 + 32,4 \times 0,33x_2 + 32 \times 1,5 \times 0,3x_4 + 30 \times 0,46x_6 + 25 \times 0,51x_8 + 25 \times 30 \times 0,48 \geq 14,2x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-9,24x_1 - 10,692x_2 - 14,4x_4 - 13,8x_6 - 12,75x_8 + 14,2x_{11} \leq 360$ (ц корм.од.);
- 13) $110 \times 0,2x_5 + 95 \times 0,18x_7 + 110 \times 60 \times 0,2 \geq 15,3x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-22x_5 - 17,1x_7 + 15,3x_{11} \leq 1320$ (ц корм.од.);
- 14) $180 \times 0,2x_9 + (350 \times 0,12 + 35 \times 0,1)x_{10} \geq 7,85x_{11}$ (ц корм.од.), або
 $-36x_9 - 45,5x_{10} + 7,85x_{11} \leq 0$ (ц корм.од.);
- 15) $9,24x_1 + 10,692x_2 + (37,44 + 13,8)x_4 + 22x_5 + 13,8x_6 + 17,1x_7 + 12,75x_8 + 36x_9 + 45,5x_{10} + 0,9x_{12} + 360 + 1320 \geq 52x_{11} + 500$ (ц корм.од.), або
 $-9,24x_1 - 10,692x_2 - 51,24x_4 - 22x_5 - 13,8x_6 - 17,1x_7 - 12,75x_8 - 36x_9 - 45,5x_{10} + 52x_{11} - 0,9x_{12} \leq 1180$ (ц корм.од.);
- 16) $46,2 \times 0,005x_1 + 32,4 \times 0,013x_2 + (32 \times 0,195 + 32 \times 1,5 \times 0,035)x_4 + 110 \times 0,022x_5 + 30 \times 0,065x_6 + 95 \times 0,041x_7 + 25 \times 0,072x_8 + 180 \times 0,015x_9 + (350 \times 0,01 + 35 \times 0,018)x_{10} + 0,096x_{12} + 110 \times 60 \times 0,025 + 25 \times 30 \times 0,068 \geq 5,6x_{11} + 50$ (ц перетравного протеїну), або
 $-0,231x_1 - 0,4212x_2 - 7,92x_4 - 2,42x_5 - 1,95x_6 - 3,895x_7 - 1,8x_8 - 2,7x_9 - 4,13x_{10} + 5,6x_{11} - 0,096x_{12} \leq 166$ (ц перетравного протеїну);
- 17) $-36x_9 + 45,5x_{10} \leq 0$ (ц корм.од.);
- 18) $x_{12} \leq 280$ (ц корм.од.).

Цільова функція:

$$Z_{\max} = (340 - 210) \times 46,2x_1 + (382 - 216) \times 32,4x_2 + (414 - 262) \times 260x_3 + (420,8 - 286,2) \times 48,5x_{11} + (4412,5 - 2830,7) \times 0,4x_{11} - 186x_{12} \text{ (грн.)}, \text{ або}$$

$$6006x_1 + 5378,4x_2 + 39520x_3 + 7160,82x_{11} - 186x_{12} \text{ (грн.)}.$$

3. Розв'яжіть **Приклад 3** – задачу з оптимізації поєднання галузей в аграрному підприємстві за допомогою засобу **Поиск решения** табличного процесора Microsoft Excel, дотримуючись вказівок:

- Активізуйте аркуш **Приклад 3** табличного документу *laboratorna_2.xlsx*.
- У чарунки A1:N23 (рис. 2.6 а) ведіть вихідні дані до запропонованої задачі оптимізації поєднання галузей **Приклад 3** (рекомендується скопіювати ці дані із файлу *do_laborator_2.xlsx* вашої робочої папки).
- У чарунки C24:N24 ведіть ідентифікатор шуканих змінних, а чарунки C25:N25 відведіть для шуканих значень невідомих.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Задача з оптимізації поєднання галузей у фермерському господарстві (вихідні дані)													
2	Номер обмеж.	Обмеження по:	С.-г. культури										Поголів'я корів	Комбі корм
3			пшениця озима	ячмінь	овочі на продаж	ярі фуражні	багаторічні трави на з.к.		однорічні трави на сіно		силосні	корм.коре-неплоди		
4							на з.к.	на сіно	на з.к.	на сіно				
5	1	загальній площі ріллі	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
6	2	площам багаторіч- та одно-річним трав					1	1	1	1				
7	3	прямим витратам праці	5	4	54	4,5	5,2	4,2	4,8	4,1	8,4	48	62	
8	4	прям.витр.пр. у напр.пер.	1,2	1,2	15	0,5	0,8	0,6	0,7	0,6	1,1	6,7	18	
9	5	механізованим роботам	1,4	1,4	11,2	0,8	1	1,2	1	1	2,2	4,4	5,6	0,1
10	6	мех.роботам у напр.період	0,35	0,45	3,4	0,2	0,25	0,3	0,25	0,25	0,48	0,98	1,04	
11	7	виробн.пшениці озимої	46,2											
12	8	виробництву ячменю		32,4										
13	9	виробн.овочів на продаж			260									
14	10	виробництву молока											48,5	
15	11	загот.і викор.конц.кормів				-37,44							7,92	-0,9
16	12	загот.і викор.грубих кормів	-9,24	-10,692		-14,4		-13,8		-12,75			14,2	
17	13	загот.і викор.зелених кормів					-22		-17,1				15,3	
18	14	загот.і викор.соковит.кормів									-36	-45,5	7,85	
19	15	загот.і викор.кормів усього	-9,24	-10,692		-51,24	-22	-13,8	-17,1	-12,75	-36	-45,5	52	-0,9
20	16	загот.і викор.перетр.прот.	-0,231	-0,4212		-7,92	-2,42	-1,95	-3,895	-1,8	-2,7	-4,13	5,6	-0,096
21	17	спів.відн.між сил.і коренепл.									-36	45,5		
22	18	придбання комбікормів												1
23		Функціонал	6006	5378,4	39520								7160,82	-186
24		Ідентифікатори змінних	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12
25		Значення змінних												

Рис.2.6 а. Аркуш **Приклад 3** з вихідними даними до задачі

- У чарунку O5 уведіть формулу лівої частини першого обмеження, використовуючи вбудовану функцію =СУММПРОИЗВ() та абсолютні посилання на чарунки, відведені для результату \$C\$25:\$N\$25 (рис. 2.6 б).
- Скопіюйте введену формулу, використовуючи засіб Автозаповнення на чарунки O4:D23.
- У чарунки P5:Q23 введіть знаки та значення правих частин кожного обмеження.
- Активізуйте чарунку O23 та виконайте команду **Данные⇒Поиск решения** (у більш ранніх версіях Office - команду **Сервис⇒Поиск решения**).
- У вікні **Параметры поиска решения**, що з'явиться на екрані, задайте потрібні опції (рис. 2.7) та натисніть кнопку **Найти решение**.

	A	B	C	D	E
1					
2	Номер обмеж.	Обмеження по:	Формули	Знаки	Вільні члени
3					
4					
5	1	загальній площі ріллі	0	≤	500
6	2	площам багато- та одно-річним трав	0	≤	78
7	3	прямим витратам праці	0	≤	20306
8	4	прям.витр.пр. у напр.пер.	0	≤	5692
9	5	механізованим роботам	0	≤	3056
10	6	мех.роботам у напр.період	0	≤	750
11	7	виробн.пшениці озимої	0	≤	6930
12	8	виробництву ячменю	0	≤	2000
13	9	виробн.овочів на продаж	0	≤	31200
14	10	виробництву молока	0	≤	8600
15	11	загот.і викор.конц.кормів	0	≤	0
16	12	загот.і викор.прубих кормів	0	≤	360
17	13	загот.і викор.зелних кормів	0	≤	1320
18	14	загот.і викор.соковит.кормів	0	≤	0
19	15	загот.і викор.кормів усього	0	≤	1180
20	16	загот.і викор.перетр.прот	0	≤	166
21	17	спів відн.між сил.і коренепл.	0	≤	0
22	18	придбанню комбікормів	0	≤	280
23		Функціонал	0!		
24		Ідентифікатори змінних			
25		Значення змінних			

Рис.2.6. Фрагменти Аркушу **Приклад 3** після введення вхідних даних і формул

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Рис. 2.7. Видяг вікна Параметри поиска решения перед розв'язуванням **Прикладу 3**

4. Проаналізуйте результат розв'язання *Прикладу 3* (рис. 2.8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
1	Задача з оптимізації поєднання галузей у фермерському господарстві (вихідні дані та результат)																	
2	Номер обмеж.	Обмеження по:	С.-г. культури											Поголів'я корів	комбікорм	Формули	Значи	Вільні член
3			пшениця озима	ячмінь	овочі на продаж	ярі фуражні	багаторічні трави		однорічні трави		силосні	корм.кор.-неплоди						
4							на з.к.	на сіно	на з.к.	на сіно								
5	1	загальній площі ріллі	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			500	<=	500	
6	2	площам багаторічн. та однорічн. трав					1	1	1	1					78	<=	78	
7	3	прямим витратам праці	5	4	54	4,5	5,2	4,2	4,8	4,1	8,4	48	62		20180,2	<=	20306	
8	4	прям. витр. пр. у напр. пер.	1,2	1,2	15	0,5	0,8	0,6	0,7	0,6	1,1	6,7	18		5505,42	<=	5692	
9	5	механізованим роботам	1,4	1,4	11,2	0,8	1	1,2	1	1	2,2	4,4	5,6	0,1	2922,39	<=	3056	
10	6	мех.роботам у напр.період	0,35	0,45	3,4	0,2	0,25	0,3	0,25	0,25	0,48	0,98	1,04		735,904	<=	750	
11	7	виробн.пшениці озимої	46,2												6930	<=	6930	
12	8	виробництву ячменю		32,4											2000	<=	2000	
13	9	виробн.овочів на продаж			260										31812,7	<=	31200	
14	10	виробництву молока											48,5		8633	<=	8600	
15	11	загот.і викор.конц.кормів				-37,44							7,92	-0,9	-832,297	<=	0	
16	12	загот.і викор.грубих кормів	-9,24	-10,692		-14,4		-13,8		-12,75			14,2		-283,807	<=	360	
17	13	загот.і викор.зелених кормів					-22		-17,1				15,3		1066,27	<=	1320	
18	14	загот.і викор.соковит.кормів									-36	-45,5	7,85		4,5E-13	<=	0	
19	15	загот.і викор.кормів усього	-9,24	-10,692		-51,24	-22	-13,8	-17,1	-12,75	-36	-45,5	52	-0,9	1180	<=	1180	
20	16	загот.і викор.перетр.прот.	-0,231	-0,4212		-7,92	-2,42	-1,95	-3,895	-1,8	-2,7	-4,13	5,6	-0,096	166	<=	166	
21	17	співвідн.між сил.і коренепл.									-36	-45,5			2,3E-13	<=	0	
22	18	придбанню комбікормів												1	280	<=	280	
23		Функціонал	6006	5378,4	39520								7160,82	-186	7290974			
24		Ідентифікатори змінних	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12				
25		Значення змінних	150	61,728	122,4	53,153	65,99	0	12,015	0	19,41	15,3549	178	280				

Рис. 2.8. Фрагмент Аркушу *Приклад 3* з розв'язком *Прикладу 3*

З рис. 2.8 видно, що $x_1 = 150$, $x_2 = 61,728$, $x_3 = 122,4$, $x_4 = 53,153$, $x_5 = 65,99$, $x_6 = 0$, $x_7 = 12,015$, $x_8 = 0$, $x_9 = 19,41$, $x_{10} = 15,355$, $x_{11} = 178$, $x_{12} = 280$, $Z_{max} = 7290974$.

Відповідь:

Оптимальне поєднання галузей у фермерському господарстві полягає в наступному:

- 500 га ріллі слід розподілити так: під пшеницю озиму – 150 га, під ячмінь – 61,7 га, під овочі на продаж – 122,4 га, під ярі фуражні – 53,2 га, під багаторічні та однорічні трави на зелені корми – 66 та 12 га відповідно, під силосні – 19,4 га, під коренеплоди – 15,36 га, висівати багаторічні та однорічні трави на сіно не доцільно;
- поголів'я корів у господарстві повинно бути 178 голів;
- господарству слід придбати 28 т комбікормів;
- очікуваний максимальний прибуток – 7 млн. 290 тис. 974 грн.

- Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_2.xlsx*. і завершіть роботу з табличним процесором. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, умови трьох розв'язаних задач, їх математичні моделі, відповіді до них із практичними рекомендаціями. Також слід роздрукувати на принтері результуючий документ, що отриманий після виконання завдань – файл *laboratorna_2.xlsx*.

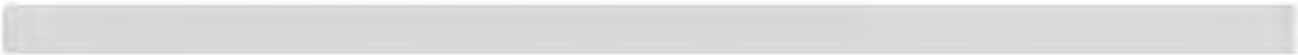
Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Яка надбудова табличного процесора Microsoft Excel дозволяє розв'язувати оптимізаційні задачі сільськогосподарського виробництва та інших галузей?
2. Опишіть алгоритм розв'язання ЗЛП у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
3. Чи потрібно записувати у чарунки Microsoft Excel формули цілової функції при розв'язанні ЗЛП із використанням засобу Поиск решения?
4. Як вводяться обмеження задачі?
5. Опишіть опції вікна Поиск решения.
6. Як встановити умову невід'ємності змінних?
7. Як ініціювати процес пошуку розв'язку задачі (як викликати вікно Поиск решения)?
8. Скільки обмежень можна задати у задачі?
9. Яка кількість невідомих може бути допустимою при використанні надбудови Поиск решения?
10. Де буде записуватися відповідь до задачі?

Список рекомендованої літератури:

1. Браславец М.Е. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / М.Е.Браславец, Р.Г.Кравченко. – М.: Колос, 1972. – 589 с.
2. Булига К. Б. Комп'ютерний практикум із застосуванням математичних методів в економіці / К. Б. Булига, В.М. Міхайленко. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 67 с.

3. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. – М.: Агропромиздат, 1990.
 4. Калініченко А. В. Використання оптимального програмування при розв'язанні задач сільськогосподарського виробництва / А.В.Калініченко, К.Д.Костоглод, Н.М.Протас. – Полтава: Видавництво “ІнтерГрафіка”, 2004. – 101 с.
 5. Кравченко Р. Г. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства / Р. Г. Кравченко, И. Г. Попов, С. З. Толпекин. – М.: Колос, 1973. – 527 с.
 6. Курносов А. П. Вычислительная техника и экономико-математические методы в сельском хозяйстве / А.П. Курносов, А.П. Сысоев. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 301 с.
 7. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.
- 

ТЕМА 3. ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ У ПРИРОДОКОРИСТУВАННІ. ПРИЙНЯТТЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Тема: Оптимізація розподілу ресурсів і транспортних перевезень. Розв'язування задач теорії ігор із використанням можливостей табличного процесора Microsoft Excel

Мета: Навчитися розв'язувати закриті та відкриті задачі оптимального розподілу ресурсів, задачі оптимізації транспортних перевезень і теорії ігор вручну та із використанням засобів табличного процесора Microsoft Excel

Завдання:

1. Навчитися здійснювати математичне формулювання закритих транспортних (розподільчих) задач і розв'язувати їх за алгоритмом методу потенціалів.
2. Засвоїти технологію розв'язування розподільчих (транспортних) задач на ПК у програмі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
3. Опанувати основи пошуку розв'язку задач із умовами невизначеності та конфлікту в чистих стратегіях.
4. Набути навиків розв'язання задач теорії ігор у табличному процесорі Microsoft Excel.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

Збільшення обсягів транспортних перевезень суттєво погіршує стан довкілля і атмосферного повітря, зокрема. Аналіз заходів із зниженням токсичності відпрацьованих газів автомобілів дозволяє виділити основні напрями боротьби зі шкідливим впливом автотранспорту на довкілля: використання нових типів силового устаткування з мінімальним викидом шкідливих речовин; заміна і вдосконалення конструкції, робочих процесів, технології виробництва автомобілів з метою зниження токсичності відпрацьованих газів; застосування пристроїв очищення або нейтралізації відпрацьованих газів; використання альтернативного або зміна характеристик традиційного палива тощо.

Важливим напрямом зменшення негативних впливів на довкілля є зменшення пробігів транспорту за рахунок оптимізації маршрутів перевезень, що є основою транспортної задачі. Тому виникає потреба оптимізувати перевезення, що дозволить скоротити пробіги автомобілів.

Транспортна задача лінійного програмування є окремим випадком загальної задачі лінійного програмування та підкласом досить широкого класу *розподільчих* задач. Постановка та математична модель транспортної задачі дещо відрізняються від постановки та математичного запису загальної задачі лінійного програмування.

Постановка класичної транспортної задачі полягає в наступному. Деякий однорідний вантаж (ресурс), що зосереджений у m постачальників ($A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$) у кількості a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) одиниць відповідно, необхідно транспортувати n споживачам ($B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$) у кількості b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) одиниць. Відомі відстані в кілометрах між кожним постачальником вантажу та кожним його споживачем (або вартості перевезення одиниці вантажу в гривнях від i -го постачальника до j -го споживача тощо) – c_{ij} . Необхідно скласти такий план перевезень, який задовольняв би потреби усіх споживачів та мав мінімальний загальний обсяг транспортних робіт (мінімальну загальну вартість перевезень).

Таблиця 3.1

Матриця планування транспортної задачі (загальний вигляд)

Постачальники	Споживачі						Запаси
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	..	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

У випадку, коли загальні запаси продукції у постачальників співпадають із загальними потребами у продукції в споживачів, транспортна задача називається **закритою**.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.1)$$

У випадку, коли загальні запаси продукції у постачальників не дорівнюють сумарним потребам споживачів у продукції, транспортна задача називається **відкритою**:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.2)$$

У зв'язку зі специфікою транспортних задач їх можна розв'язувати не тільки симплекс-методом, а й методами, що характерні саме для цього класу задач, а саме: дельта-методом, методом апроксимації Фогеля, методом диференціальних рент, методом потенціалів та іншими. Із означених методів достатньо ефективним і відносно простим є метод потенціалів.

Транспортні задачі є окремим випадком більш широкого класу задач – *розподільчих*, основною особливістю яких є те, що вони охоплюють більш широке коло випадків розподілу тих чи інших видів ресурсів за екстремумом будь-якого сенсу. Тобто задачі можуть розв'язуватися як на мінімум, так і на максимум на основі відповідних методів.

Аналогічно до транспортних, розподільчі задачі можуть бути двох типів:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$$

закриті і відкриті

Відкриті розподільчі та транспортні задачі можна розв'язати методом потенціалів після зведення їх до закритих, шляхом уведення фіктивного постачальника чи споживача продукції, пропозиція чи відповідно, попит якого

$$\text{складає } a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \quad (b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j).$$

Розподільчі (транспортні) задачі доцільно розв'язувати на ПК із використанням програмних засобів, що застосовуються для розв'язання ЗЛП.

У природокористуванні часто доводиться мати справу з задачами, де є елемент невизначеності та ризику. Наприклад, обрати сорт культури, що дозволить підвищити урожайність, не маючи точного прогнозу погоди. Такого типу задачі відносяться до теорії ігор.

Теорія ігор – це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають **іграми**.

У ході гри кожен з гравців застосовує систему правил, яка однозначно визначає вибір його поведінки при кожному ході залежно від ситуації, яка складається у процесі гри. Така система правил називається *стратегією гравця*. Закон відповідності між набором можливих ситуацій певної гри та виграшем конкретного гравця називається функцією виграшу або функцією платежів.

Ігри, в яких дії гравців направлені на максимізацію виграшів колективом (коаліцією) без подальшого розподілу виграшу між учасниками гри, називаються коаліційними. Ігри, в яких метою кожного учасника є отримання по можливості більшого індивідуального виграшу, називаються безкоаліційними. Безкоаліційна гра називається грою з постійною сумою, якщо існує така константа C , що $\sum_{k \in K} H_k(s) = C$ для всіх можливих ситуацій $s \in S$.

Ситуація s у грі називається прийнятною або допустимою для гравця k , якщо цей гравець, змінюючи в ситуації, що склалася, свою стратегію sk на іншу sk' , не зможе зменшити свого виграшу. Ситуація s , що є прийнятною для усіх

гравців, називається ситуацією рівноваги. Процес знаходження ситуації рівноваги і є процесом розв'язання гри.

Гра називається *парною*, якщо у ній стикаються інтереси двох супротивників. Якщо ж супротивників у грі більше двох, то така гра називається *множинною*. Гра називається з *нульовою сумою*, якщо один гравець виграв стільки, скільки другий програв в цій же партії. Кожна фіксована стратегія, яку може вибрати гравець, називається його *чистою стратегією*.

Матричною називають парну гру з нульовою сумою при умові, що кожен гравець має скінчене число чистих стратегій. Якщо перший гравець має m чистих стратегій, а другий – n , то парна гра з нульовою сумою формально описується системою чисел – матрицею $\|a_{ij}\|_{m \times n}$, елементи якої визначають

виграш першого гравця (i відповідно програш другого). Матрицю $\|a_{ij}\|$ називають платіжною матрицею або матрицею гри, в якій i -тий рядок – це i -та стратегія першого гравця, а j -тий стовпчик – це j -та стратегія другого гравця.

Більшість реальних виробничих ситуацій, які можна змодельовати за допомогою теорії ігор, дуже рідко мають розв'язок у чистих стратегіях, а тому пошук розв'язків здійснюється у змішаних стратегіях.

Задачею кожного з гравців є максимізація свого виграшу. Максимізація виграшу першого гравця еквівалентна мінімізації виграшу другого і навпаки – максимізація виграшу другого гравця еквівалентна мінімізації виграшу першого. Задача максимізації гарантованого виграшу першого гравця і задача мінімізації гарантованого програшу другого гравця зводиться до пари взаємно-двоїстих задач лінійного програмування:

Якщо позначити:

а) через $x_1, x_2, \dots, x_m$ ймовірності (частоти), з якими перший гравець вибирає відповідно першу, другу, ..., m -ну чисті стратегії так, що

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad (i = \overline{1, m});$$

б) через $y_1, y_2, \dots, y_n$ ймовірності, з якими другий гравець вибирає першу, другу, ..., n -ну чисті стратегії, причому

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \quad (j = \overline{1, n}),$$

то набори чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ називаються **змішаними стратегіями** першого і другого гравців відповідно.

Задача першого гравця

$$F = v \max -$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Задача другого гравця

$$\Phi = u \min -$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq u \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Розв'язати матричну гру у змішаних стратегіях можна:

- на основі аналітичних розрахунків;
- використовуючи графічний спосіб (ігри 2×2 , $2 \times n$, $m \times 2$);
- після приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування із наступним розв'язанням за алгоритмом вивченого симплекс-методу, або із використанням ПК у середовищі електронних таблиць MS Excel за допомогою засобу Поиск решения.

Порядок і методика виконання завдань

I. Навчитися здійснювати математичне формулювання закритих транспортних (розподільчих) задач і розв'язувати їх за алгоритмом методу потенціалів.

Постановка транспортної задачі:

У m постачальників ($A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$) зосереджено деякий однорідний вантаж (ресурс) у кількості a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) одиниць відповідно, який необхідно транспортувати n споживачам ($B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$) у кількості b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) одиниць. Відомі відстані в кілометрах між кожним постачальником вантажу та кожним його споживачем (або вартості перевезення одиниці вантажу в гривнях від i -го постачальника до j -го споживача тощо) – c_{ij} . Необхідно скласти такий план перевезень $X\{x_{ij}\}$, який задовольняв би потреби усіх споживачів та мав мінімальний загальний обсяг транспортних робіт (мінімальну загальну вартість перевезень).

У розподільчі задачі необхідно розподілити наявні ресурси кількох видів між кількома об'єктами так, щоб функція мети досягала оптимального значення.

Відповідно, **модель розподільчої (транспортної) задачі** має вигляд.

Визначити
$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{extr}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \leq a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \leq a_2 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \leq a_m \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} \leq b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} \leq b_2 \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} \leq b_n \end{cases}$$

Алгоритм розв'язання транспортних (розподільчих) задач наведено на рис.3.1

Записати математичну модель задачі

Задача закрита?

$$\left(\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j \right)$$

ні

ні

так

Ввести
фіктивного
споживача

Ввести
фіктивного
постачальника

Побудувати опорний план

Розрахувати значення цільової
функції $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$

Кількість заповнених
клітинок $< m+n-1$

Кількість заповнених
клітинок $= m+n-1$

так

Ввести нуль-поставку

ні

ні

так

Розрахувати систему
потенціалів $u_i + v_j = C_{ij}$

Розрахувати характеристики
вільних клітинок
 $l_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$

Вибрати найменшу поставку у
вершинах, позначених “-” і
перерозподілити її по контуру

Вершини побудованого
контура позначити
символами “+” та “-”

Побудувати контур по
перерозподілу ресурсів

Умова оптималь-
ності виконується?

$$(l_{ij} < 0)$$

так

Задача на
мінімум?

ні

так

Умова оптималь-
ності виконується?

$$(l_{ij} > 0)$$

так

Сформулювати висновок

2. Засвоїти технологію розв'язування розподільчих (транспортних) задач на ПК у програмі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.

У нинішній час розвитку інноваційних технологій та комп'ютерної техніки було б помилкою думати, що транспортні (розподільчі) задачі людство не навчилося розв'язувати з використанням спеціальних комп'ютерних програм. Оскільки такі задачі є окремим випадком задач лінійного програмування, то для їх розв'язання можна використати табличний процесор Microsoft Excel і, зокрема, його надбудову Поиск решения (solver).

Для розв'язання розподільчих (транспортних) задач в Microsoft Excel із використанням надбудови Поиск решения необхідно:

- побудувати математичну модель задачі;
- в окремі чарунки Excel записати вихідні дані – задану матрицю відстаней $C\{c_{ij}\}$ між постачальниками та споживачами (матрицю вартостей, урожайностей тощо);
- відвести окремі чарунки Excel, залишивши їх незаповненими, для шуканого розв'язку $X\{x_{ij}\}$ – плану розподілу (перевезень) продукції;
- записати формули лівої частини обмежень: суми по відповідних рядках (вся продукція від кожного споживача повинна вивозитися) і суми по відповідних стовпчиках (задоволення попиту кожного споживача);
- в окремі чарунки записати значення правих частин кожного обмеження;
- увести формулу для обчислення цільової функції задачі, використовуючи вбудовану функцію MS Excel СУММПРОИЗВ*. Зверніть увагу, що в чарунках, де були введені формули на даному етапі будуть нулі.
- виконати дію Данные⇒Поиск решения (виконати команду Сервис ⇒ Поиск решения) для ініціалізації розв'язання задачі;
- встановити необхідні опції у вікні Параметры поиска решения (адресу чарунки з формулою цільової функції; напрямок екстремуму; адресу масиву чарунок для шуканих значень невідомих; обмеження задачі; умову невід'ємності та при потребі інші параметри);
- натиснути кнопку **Найти решение** (кнопку **Выполнить**);
- здійснити інтерпретацію отриманого результату, або ж при потребі скорегувати модель і розв'язати задачу з новими вхідними даними.

Процес розв'язання задачі відбувається за відомим Вам алгоритмом (див. лаб. 2)

* Нагадаємо, що ця функція дозволяє обчислювати суму добутків відповідних елементів масивів (у нашому випадку – елементів двох масивів $C\{c_{ij}\}$ та $X\{x_{ij}\}$).

3. Опанувати основи пошуку розв'язку задач із умовами невизначеності та конфлікту в чистих стратегіях.

Теорія ігор може й повинна знайти широке застосування при розв'язанні задач агропромислового спрямування, бо дозволяє суттєво зменшити рівень невизначеності при прийнятті управлінських рішень з метою забезпечення цілеспрямованих дій по підвищенню ефективності функціонування АПК. Переваги даного підходу полягають, як це не дивно, у його песимістичності, а саме – методи теорії ігор дозволяють знайти найкращий гарантований результат із найгірших можливих варіантів. Це дає змогу обрати стратегію вирощування культур, технологію обробітку, стратегію розвитку і т.п., які за будь-яких зовнішніх умов надаватимуть можливість отримати хоча й мінімальний, але гарантований прибуток.

Задачею кожного з гравців у парній грі є максимізація свого виграшу. Максимізація виграшу першого гравця еквівалентна мінімізації виграшу другого і навпаки – максимізація виграшу другого гравця еквівалентна мінімізації виграшу першого.

Гарантований виграш першого гравця, який застосовує фіксовану (чисту) i -ту стратегію, визначається так:

$$\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \quad (3.3)$$

Число $\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \right\}$ називається нижнім значен-

ням гри, а чиста стратегія i_0 , при якій досягається $\underline{V}$, називається максимінною

стратегією. Аналогічно, число $\bar{V} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \right\}$ називається верхнім

значенням гри, а j_0 – мінімаксною стратегією другого гравця.

Завжди має місце $\underline{V} \leq \bar{V}$. Якщо $\underline{V} = \bar{V} = V$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях, а число V називається значенням гри (або ціною гри). Гра має сідлову точку в чистих стратегіях тоді і тільки тоді, коли існує елемент

матриці $a_{i_0 j_0}$, який є мінімальним у своєму рядкові і в той же час максимальним у стовпчику, тобто

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \quad (3.4)$$

Будь-яка пара i_0, j_0 , що відповідає (3.4) називається сідловою точкою.

Таким чином, розв'язання задачі з умованим невизначеності та конфлікту здебільшого пов'язане з необхідністю вибору *найкращого результату із найгірших* для кожного з гравців. Щоб з'ясувати, чи має матрична гра розв'язок у чистих стратегіях та визначити ціну гри необхідно:

1. Для кожної стратегії *першого* гравця необхідно обрати мінімальне значення виграшу $\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$ і серед цих мінімальних значень

обрати гарантований максимум $\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \right\}$

(максимінна стратегія). Наприклад,

Стратегії гравця А	Стратегії гравця В				α_i (min)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	-2	4	-9	5	-9
β_j (max)	8	5	9	8	$\underline{V} = \overline{V} = V = 5$

2. Оскільки у матричній грі виграш першого гравця еквівалентний програшу другого, то для кожної стратегії *другого гравця* слід обрати максимальне значення $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$, а далі серед цих максимальних значень обрати мінімум $\overline{V} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \right\}$ (мінімаксна стратегія).

3. Порівняти отримані значення $\underline{V}$ та $\overline{V}$. Якщо $\underline{V} = \overline{V} = V$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях, а число V називається значенням гри (або ціною гри).

4. Сформувати відповідь щодо стратегій, які необхідно обрати кожному гравцю, щоб незалежно від дій конкурента отримати гарантований виграш.

Проте слід пам'ятати, що, як правило, у реальних відносинах між об'єктами та при іграх з природою (гра, в якій однією стороною є природа) ситуація, в якій слід використовувати лише одну фіксовану стратегію є малоюмовірною, хоча теоретично й можливою. Більшість же реальних виробничих ситуацій, які можна змоделювати за допомогою теорії ігор, дуже рідко мають розв'язок у чистих стратегіях, а тому пошук розв'язків здійснюється у змішаних стратегіях.

4. Набути навиків розв'язання задач теорії ігор у табличному процесорі Microsoft Excel.

Як було зазначено вище, теорія ігор – математична теорія конфліктних ситуацій. Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо. У таких випадках пошук розв'язків задач теорії ігор, здебільшого, здійснюється у змішаних стратегіях.

Для розв'язання типової задачі теорії ігор необхідно:

1. Пересвідчитися, що задача не має розв'язку в чистих стратегіях.
2. Побудувати модель задачі

Позначити через $x_1, x_2, \dots, x_m$ – ймовірності (частоти), з якими перший гравець вибирає відповідно першу, другу, ..., m -ну чисті стратегії так, що

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \quad (i = \overline{1, m})$$

Цільова функція та система обмежень:

$$\begin{aligned} F &= v \max \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i &\geq v \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

3. Після побудови моделі задачі, в середовищі Microsoft Excel слід:
 - в окремі чарунки ввести вхідні дані задачі;
 - відвести чарунки для шуканих значень x_i ;
 - по чергово в окремі чарунки записати формули лівих та значення правих частин кожного обмеження;
 - в окрему чарунку записати формулу для цільової функції;
 - виконати дію **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения**
 - встановити необхідні опції у вікні **Поиск решения** і натиснути **Выполнить**;
 - здійснити інтерпретацію отриманого результату, або ж при потребі скорегувати модель і розв'язати задачу з новими вхідними даними.

5. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_3.xlsx*.

**Завдання для практичного виконання,
порядок і рекомендації щодо їх виконання**

Вправа 1. Навчитися здійснювати математичне формулювання закритих транспортних (розподільчих) задач і розв'язувати їх за алгоритмом методу потенціалів

1. Пригадайте загальну постановку транспортної задачі.
2. Сформулюйте визначення закритої і відкритої транспортної задачі.
3. Наведіть у загальному вигляді математичні моделі транспортної (розподільчої) закритої задачі (запишіть систему обмежень, умову невід'ємності та цільову функцію).
4. Вкажіть методи розв'язання транспортних (розподільчих) задач.
5. Сформулюйте алгоритм розв'язання транспортних (розподільчих) задач методом потенціалів.
6. Назвіть відомі Вам способи побудови опорного плану для заповнення першої транспортної таблиці.
7. Ознайомтеся з умовою транспортної задачі та побудуйте її модель.

Приклад 1.

ЗАКРИТА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

У господарстві на трьох ділянках за готовили 2600 т сіна: на першій ділянці – 750 т, на другій – 1000 т, на третій – 850 т. Сіно необхідно перевезти до чотирьох молочно-товарних комплексів (МТК), потреба яких складає 700, 550, 900 та 450 т відповідно. Відстані між ділянками та МТК у кілометрах задані матрицею C :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Для оптимізації внутрішньогосподарських перевезень потрібно скласти такий план перевезення сіна, при якому обсяг транспортних робіт у тонно-кілометрах буде мінімальним. Відповідно, і витрати пального, а, відтак, і обсяги викидів забруднюючих речовин від роботи одного і того ж виду транспорту теж будуть мінімальними

Опорний план побудувати за способом північно-західного кута.

Математичне формулювання:

- Нехай, $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ – обсяги перевезення сіна з *першої* ділянки, до 1-го, 2-го, 3-го та 4-го комплексу відповідно, т
- Нехай, $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ – обсяги перевезення сіна з *другої* ділянки, до 1-го, 2-го, 3-го та 4-го комплексу відповідно, т
- Нехай, $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$ – обсяги перевезення сіна з *третьої* ділянки, до 1-го, 2-го, 3-го та 4-го комплексу відповідно, т.

Обмеження задачі*:

По вивезенню продукції: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 750$...	По забезпеченню потреби: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 700$...
---	---

Цільова функція

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 7 \cdot x_{12} + 8 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{14} + 4 \cdot x_{21} + 8 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 5 \cdot x_{31} + 4 \cdot x_{32} + 3 \cdot x_{33} + 5 \cdot x_{34} \rightarrow \min$$

8. Розв'яжіть наведену транспортну задачу аграрного виробництва
Приклад 1 вручну за алгоритмом методу потенціалів.

Розв'язання

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = \underline{\hspace{5cm}}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^3 a_i \neq \sum_{j=1}^4 b_j$, маємо _____ транспорту задачу

Будуємо опорний план в першій транспортній таблиці за способом північно-західного кута (табл. 3.2) і виконуємо всі пункти алгоритму методу потенціалів

Таблиця 3.2

Блок транспортних таблиць

Ділянки	Молочно-товарні комплекси				Запаси A_i, t	u_i
	1	2	3	4		
1	4	7	8	6		$u_1 =$
2	4	8	7	4		$u_2 =$
3	5	4	3	5		$u_3 =$
Потреби B_j, t						x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	x	$Z_1 =$

* тут подані лише два обмеження, здобувачам дописати всі інші обмеження

Ділянки	Молочно-товарні комплекси				Запаси A_i, t	u_i
	1	2	3	4		
1	4	7	8	6		$u_1 =$
2	4	8	7	4		$u_2 =$
3	5	4	3	5		$u_3 =$
Потреби B_j, t						x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_3 =$	x	$Z_2 =$
1	4	7	8	6		$u_1 =$
2	4	8	7	4		$u_2 =$
3	5	4	3	5		$u_3 =$
Потреби B_j, t						x
v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_3 =$	x	$Z_3 =$

- Проаналізуйте значення характеристик вільних клітинок, отримані на третій ітерації розв'язання **Прикладу 1**. Який висновок це дозволяє зробити?
- Сформулюйте та запишіть відповідь до **Прикладу 1**.

Вправа 2. Засвоїти технологію розв'язування розподільчих (транспортних) задач на ПК у програмі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения

- Пригадавши загальну постановку розподільчої (транспортної) задачі, поміркуйте, якщо вихідні дані у транспортній задачі задані матрицею C (розміром $m \times n$), то в табличному процесорі вони являтимуть собою
- Відповідно, шукані значення поставок X_{ij} в Excel теж являтимуть собою

3. Визначте, які дві основні групи обмежень задають при розв'язанні ТЗ. Поміркуйте, яку вбудовану функції Microsoft Excel краще використати для запису лівої частини кожного обмеження _____
4. Запишіть загальну формулу цільової функції у транспортній задачі у скороченому та розширеному вигляді

$Z =$ _____ $=$ _____ $\rightarrow$ _____

Поміркуйте, яку вбудовану функції Microsoft Excel краще використати для запису цільової функції _____

Вкажіть, до якої категорії функцій вона відноситься _____

5. Ознайомтеся з умовою наведеної задачі аграрного виробництва. Визначте, до якого типу задач вона відноситься. Зведіть задачу до закритої.

Приклад 2.

ВІДКРИТА РОЗПОДІЛЬЧА ЗАДАЧА

У господарстві планується посіяти ячмінь – на площі 400 га, овес – на площі 420 га, кукурудзу – на площі 580 га.

Для вирощування даних зернофуражних культур відведено чотири поля, площі яких відповідно дорівнюють 320, 380, 450 та 350 га.

Урожайності культур на полях різняться у залежності від попередників і задані матрицею C :

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 29 & 27 & 22 \\ 16 & 25 & 24 & 19 \\ 27 & 34 & 30 & 29 \end{pmatrix}$$

Скласти такий план розподілу культур за полями, щоб отримати максимум зернофуражу.

Розв'язання

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \underline{\hspace{5cm}}$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = \underline{\hspace{5cm}}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^3 a_i \neq \sum_{j=1}^4 b_j$ (загальна площа, що потрібна для посіву трьох культур менше, ніж сумарні наявні площі ділянок), маємо _____ розподільчу задачу

Для зведення задачі до закритої, необхідно додати фіктивну культуру, під

посів якої можна відвести $a_4 = \sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^3 a_i = \underline{\hspace{2cm}}$ га.

6. Для подальшого розв'язання **Прикладу 2** завантажте табличний процесор Microsoft Excel.
7. Надайте активному аркушу назву Розподільча задача.
8. Розв'яжіть **Приклад 2** на аркуші Розподільча задача із використанням засобу Поиск решения Microsoft Excel, дотримуючись наведених вказівок:
 - Заповніть діапазон чарунок A1:E9 вихідними даними (рис. 3.2) та відформатуйте його за наведеним зразком (безпосередньо числову матрицю урожайностей культур на кожній ділянці уведіть у діапазон B6:E9)
 - Відведіть чарунки B11:E17 для результату – шуканих площ посіву (попередньо діапазон A3:E9 можна скопіювати у буфер обміну; вставити його, починаючи з 11-го рядка та відредагувати одержану копію)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	РОЗПОДІЛЬЧА ЗАДАЧА							
2								
3	Урожайності культур, ц/га							
4		Ділянки						
5	Культури	1	2	3	4			
6	ячмінь	20	29	27	22			
7	овес	16	25	24	19			
8	кукурудза	27	34	30	29			
9	фіктивна	0	0	0	0			
10								
11	Площі посіву культур, га							
12		Ділянки				Запаси		
13	Культури	1	2	3	4	A_i, га		
14	ячмінь					0 =	400	
15	овес					0 =	420	
16	кукурудза					0 =	580	
17	фіктивна					0 =	100	
18		0	0	0	0		1500	
19	Потреби	=	=	=	=			
20	B_j, га	320	380	450	350	1500	0	
21								

Рис.3.2. Фрагменти Аркушу Розподільча задача після введення вхідних даних і формул

- У чарунку F14 уведіть формулу лівої частини першого обмеження **=СУММ(B14:E14)**. У чарунки G14, H14 введіть знак і значення правої частини першого обмеження.
- В окремі чарунки уведіть інші обмеження щодо висіву кожного виду культур (формулу, записану в чарунці F14 за допомогою засобу Автозаповнення доцільно скопіювати на сусідні нижні чарунки F15, F16, F17).
- Аналогічно введіть у окремі чарунки B18:E20 формули для лівої частини, знак та значення правої частини кожного обмеження по засіванню земельних ділянок.
- У чарунці H18 обчисліть сумарну площу під посів усіх культур, у чарунці F20 обчисліть сумарну площу наявних ділянок. Пересвідчіться, що ці значення співпадають, а, отже, Ви правильно звели задачу до закритої.
- У чарунку H20 введіть формулу для цільової функції, використовуючи вбудовану функцію **=СУММПРОИЗВ(B6:E9;B14:E17)**
- Активізуйте чарунку H20 та виконайте команду Данные⇒Поиск решения (у більш ранніх версіях Office - команду Сервис⇒Поиск решения).
- У вікні Параметры поиска решения, що з'явиться на екрані, вкажіть чарунку цільової функції, напрямок екстремуму, діапазон чарунок для шуканих начень невідомих (рис. 3.3а).

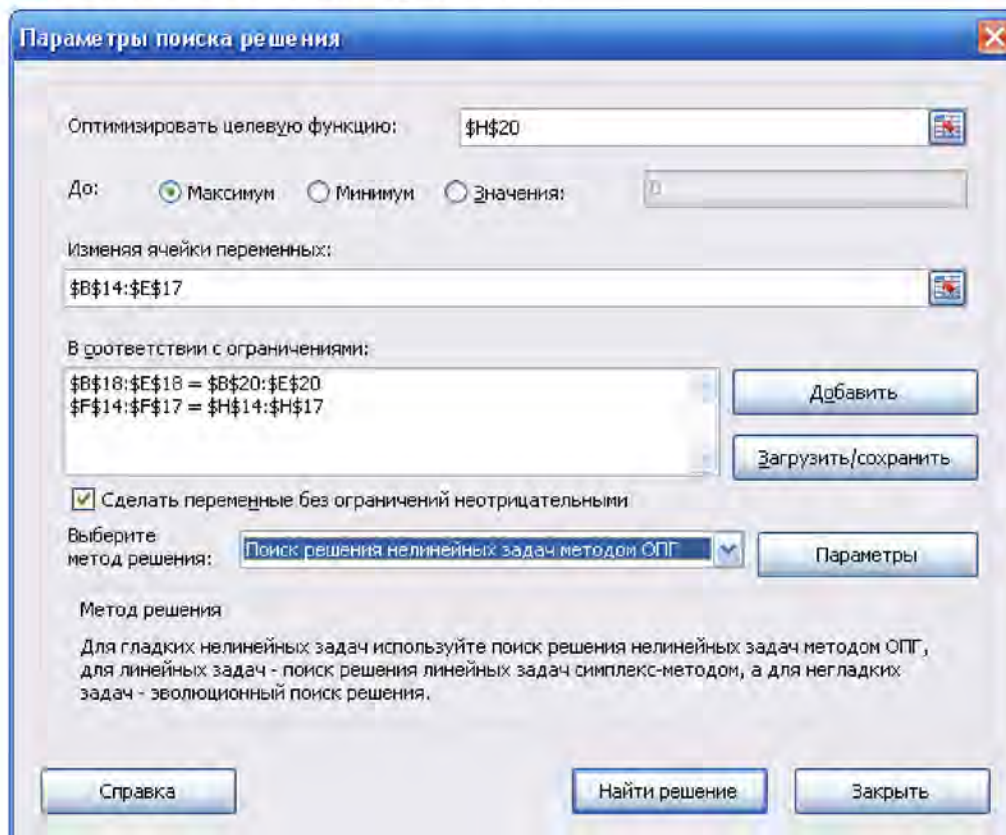


Рис.3.3а. Фрагмент вікна Параметры поиска решения для розв'язання задачі

- Для запису обмежень натисніть кнопку **Добавить** і по чергово введіть дві групи обмежень (рис. 3.36).
- Задайте умову невід'ємності змінних і натисніть кнопку **Найти решение**.

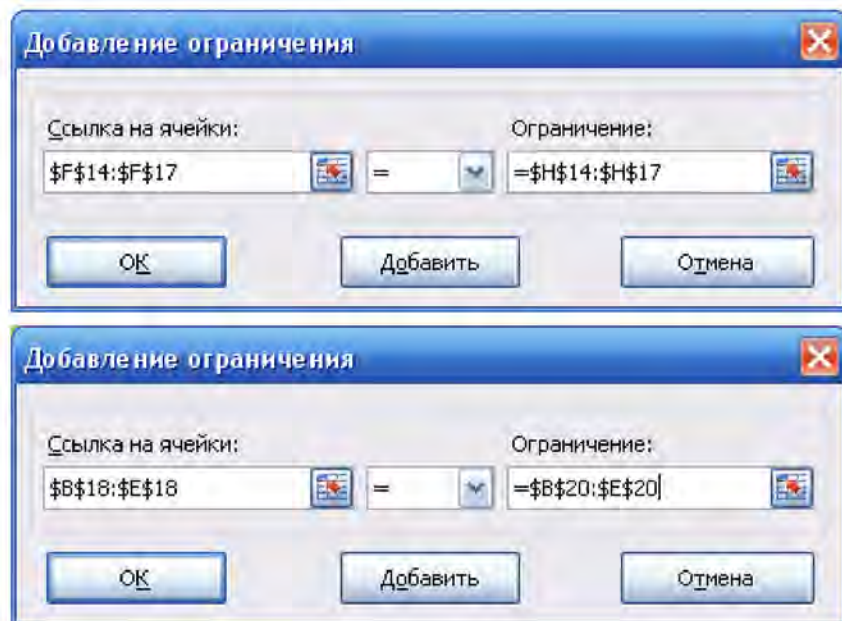


Рис.3.36. Введення обмежень для розв'язання задачі

9. Проаналізуйте отриманий результат і сформулюйте відповідь до задачі
10. Збережіть результат роботи у Вашій папці диску D: з іменем іменем *laboratorna_3.xlsx*.

Вправа 3. Опанувати основи пошуку розв'язку задач із умовами невизначеності та конфлікту в чистих стратегіях

1. Сформулюйте визначення гри та основні типи ігрових задач, що можуть виникати у природокористуванні.
2. Пригадайте, коли гра має сідлову точку і, відповідно, розв'язок гри в чистих стратегіях.
3. Ознайомтеся з наведеними нижче ігровими задачами. Проаналізуйте, до якого типу гри вони відносяться.

Приклад 3

В аграрному підприємстві під пшеницю можуть вноситися мінеральні добрива у таких дозах: $N_{30} P_{30} K_{30}$, $N_{45} P_{45} K_{45}$, $N_{60} P_{60} K_{60}$. Очікуване підвищення урожайності в центнерах з 1-го га за рахунок внесення добрив залежно від забезпеченості рослин вологою у загальному вигляді наведено в таблиці:

Дози внесення добрив, кг/га	Рівень забезпеченості вологою		
	низький	середній	високий
$N_{30} P_{30} K_{30}$	4,4	5,7	4
$N_{45} P_{45} K_{45}$	5,0	5,4	5,2
$N_{60} P_{60} K_{60}$	4,8	6,1	7,4

Чи має матрична гра розв'язок у чистих стратегіях? Якщо має, визначити оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Приклад 4

Дві агрофірми A і B займаються вирощуванням та заготівлею лікарських рослин. Агрофірма A рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) та в газетах (A_3). Агрофірма B разом із використанням радіо (B_1), телебачення (B_2) та газет (B_3), розсилає поштою рекламні брошури (B_4). Залежно від якості та інтенсивності проведення рекламної компанії, кожна з агрофірм може залучити до себе частину клієнтів конкуруючого підприємства. Матриця, яка наведена нижче, характеризує процент клієнтів, залучених або втрачених агрофірмою A :

Стратегії рекламної компанії	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	-2	9	-3
A_2	6	5	6	8
A_3	-2	4	-9	5

Чи має матрична гра розв'язок у чистих стратегіях? Якщо має, визначити ціну гри.

Приклад 5

Агрофірма планує посіяти ячмінь одного із трьох сортів (A_1 , A_2 , A_3). Врожаї ячменю багато в чому залежать від погоди. Запланований валовий збір ячменю у грошовому виразі в залежності від погоди (літо посушливе – B_1 , нормальне – B_2 чи дощове – B_3) заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3520 & 4290 & 3740 \\ 3960 & 4400 & 3850 \\ 3300 & 4510 & 3630 \end{pmatrix}$$

З'ясувати, який сорт ячменю доцільно висівати, щоб отримати найбільший валовий збір із гектара у грошовому виразі за умови, що надійний прогноз погоди відсутній.

4. Опануйте методику розв'язання задач теорії ігор, що мають розв'язок у чистих стратегіях, наведену в теоретичній частині, та розв'яжіть у робочому зошиті **Приклад 5**:
- Знайдіть *мінімум* у кожному рядку матриці А (мінімально можливий валовий збір кожного сорту при різних погодних умовах).
 - Серед визначених мінімумів оберіть найбільше число (гарантований валовий збір при будь-яких погодних умовах) – визначте максимінну стратегію.
 - Знайдіть максимум у кожному стовпчику матриці А.
 - Серед визначених максимумів оберіть найменше число – визначте мінімаксу стратегію.
 - Порівняйте нижнє і верхнє значення гри. Якщо вони співпадають – отримано розв'язок задачі у чистих стратегіях.
 - Сформулюйте відповідь до **Прикладу 5** та надайте практичні рекомендації виробництву – який сорт ячменю треба висівати, щоб незалежно від погодних умов отримати максимально гарантований валовий збір і в якому розмірі його можна очікувати..
5. Проаналізуйте умову **Прикладу 3**. Чи є у вихідній матриці (таблиці) число, що одночасно є найменшим у своєму рядку і найбільшим у своєму стовпчику (чи є сідловка точка)? Сформулюйте відповідь до **Прикладу 3**.

Вправа 4. Набути навиків розв'язання задач теорії ігор у табличному процесорі Microsoft Excel

1. Пригадайте, коли задача теорії ігор має розв'язок у чистих стратегіях. Коли гра має розв'язок у змішаних стратегіях?
2. Пригадайте технологію розв'язання задачі лінійного програмування у процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
3. Ознайомтеся з умовою задачі прикладу 6. Складіть математичну модель до даної задачі.

Приклад 6

В аграрному підприємстві під кукурудзу на силос вносять органічні та мінеральні добрива. Середня урожайність зеленої маси в центнерах з 1-го га залежно від вологозабезпеченості та кількості внесених добрив у загальному виді наведена в таблиці:

Варіанти внесення добрив	Рівень забезпеченості вологою		
	низький	середній	високий
Гній 20 т/га	180	210	220
Гній 10 т/га та N ₁₀ P ₁₀ K ₁₀	190	280	250
N ₂₀ P ₂₀ K ₂₀	230	240	190

Використовуючи методи теорії ігор, визначити, яким чином слід вносити добрива, щоб незалежно від рівня вологи, забезпечити оптимальний рівень урожайності.

Методика розв'язання:

Дана задача не має розв'язку у чистих стратегіях, так як у вихідній матриці відсутній елемент, що одночасно є найменшим у своєму рядку і найбільшим у своєму стовпчику.

Будемо шукати розв'язок у змішаних стратегіях

- Опануйте алгоритм приведення задачі теорії ігор, що має розв'язок у змішаних стратегіях, до задачі лінійного програмування.

Математичне формулювання та приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування

Оскільки впливати на рівень забезпеченості вологою ми не можемо, а можемо лише вносити добрива за різними варіантами, то позначимо x_1 , x_2 , x_3 ймовірності застосування кожного варіанту внесення добрив під кукурудзу на силос.

Математична модель цієї задачі матиме вигляд*:

$180x_1 + 190x_2 + 230x_3 \geq V$ – урожайність при низькому рівні вологи

$210x_1 + 280x_2 + 240x_3 \geq V$ – урожайність при середньому рівні вологи

$220x_1 + 250x_2 + 190x_3 \geq V$ – урожайність при високому рівні вологи

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

$V = Z_{\max}$ – оптимальний рівень урожайності.

Виконавши в чотирьох нерівностях перенесення V в ліві частини нерівностей, маємо таку задачу лінійного програмування

$180x_1 + 190x_2 + 230x_3 - V \geq$

$210x_1 + 280x_2 + 240x_3 - V \geq V$

$220x_1 + 250x_2 + 190x_3 - V \geq V$

$x_1 + x_2 + x_3 + 0V = 1$,

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1V = Z_{\max}$

* зверніть увагу, для запису формул кожного з трьох перших обмежень, коефіцієнти підставляєм з кожного стовпчика вихідної платіжної матриці (по кожному рівню вологи).

5. Активізуйте файл з іменем *laboratorna_3.xlsx* Вашої папки диску D:.
6. До робочої книги додайте ще один аркуш, якому надайте назву Теорія ігор.
7. Активізуйте аркуш Теорія ігор та проведіть підготовчу роботу для розв'язання Прикладу 6 із використанням засобу Поиск решения (рис. 3.4):
 - уведіть вихідні дані;
 - відведіть чарунки B4:E4 для шуканих значень невідомих
 - уведіть у чарунку F6 формулу лівої частини першого обмеження (задавши абсолютне посилання на чарунки для результату \$B\$4:\$E\$4)
 - скопіюйте уведену формулу чарунки F6 у сусідні чарунки F7:F10, використовуючи засіб автозаповнення.

Модель задачі у середовищі MS Excel виглядає так, як зображено на рис.3.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		<i>x1</i>	<i>x2</i>	<i>x3</i>	<i>V</i>			
4	Шукані значення невідомих							
5	Обмеження задачі:					Формули:		
6		180	190	230	-1	=СУММПРОИЗВ(B6:E6;\$B\$4:\$E\$4)	≥	0
7		210	280	240	-1	=СУММПРОИЗВ(B7:E7;\$B\$4:\$E\$4)	≥	0
8		220	250	190	-1	=СУММПРОИЗВ(B8:E8;\$B\$4:\$E\$4)	≥	0
9		1	1	1	0	=СУММПРОИЗВ(B9:E9;\$B\$4:\$E\$4)	=	1
10	Цільова функція	0	0	0	1	=СУММПРОИЗВ(B10:E10;\$B\$4:\$E\$4)		
11								
12								

Рис. 3.4. Початкові дані та формули для розв'язання Прикладу 6

8. Виконайте команду **Поиск решения** стрічки **Данные** та розв'яжіть Приклад 6 із використанням даного засобу (рис. 3.5).

На рис. 3.5 відображено фрагмент вікна **Параметры поиска решения** з уведеними опціями для розв'язання Прикладу 6.

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделайте переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Рис. 3.5. Параметры окна **Параметры поиска решения**

9. Проаналізуйте отриманий результат (рис. 3.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		x_1	x_2	x_3	V			
4	Шукані значення невідомих	0,00	0,40	0,60	214,00			
5	Обмеження задачі:					Формули:		
6		180	190	230	-1	$0 \geq$	0	
7		210	280	240	-1	$42 \geq$	0	
8		220	250	190	-1	$0 \geq$	0	
9		1	1	1	0	$1 =$	1	
10	Цільова функція	0	0	0	1	214,0		
11								
12								

Рис. 3.6. Результат розв'язання Прикладу 6

Використавши засіб Поиск решения, отримуємо наступний результат: $x_1=0$; $x_2=0,40$; $x_3 = 0,60$; $V = 214$ (рис. 3.6). Тобто, якщо на 40 % площі під кукурудзу на зерно внести добрива у варіанті Гній 10 т/га та $N_{10} P_{10} K_{10}$ і на 60 % внести $N_{20} P_{20} K_{20}$, можна гарантовано отримати урожайність не менше 214 ц/га, незалежно від рівня забезпечення вологою.

10. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_3.xlsx* і завершіть роботу з табличним процесором. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, умови та відповіді до чотирьох розв'язаних задач. Також слід роздрукувати на принтері результуючий документ, що отриманий після розв'язання Прикладу 2 і Прикладу 6 (файл *laboratorna_3.xlsx*).

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Чому оптимізація транспортних перевезень сприяє отриманню екологічних та економічних результатів?
2. Загальна постановка розподільчої задачі.
3. Які основні два класи транспортних (розподільчих) задач Вам відомі?
4. Способи розв'язання розподільчих (транспортних) задач.
5. Алгоритм методу потенціалів.
6. Опишіть технологію розв'язання транспортної (розподільчої) задачі у табличному процесорі Microsoft Excel із використанням засобу Поиск решения.
7. Що вивчає теорія ігор? Що розуміють під стратегією гравця у теорії ігор?
8. Як класифікуються ігри залежно від кількості гравців? Від числа можливих стратегій гравців?
9. Що називають функцією виграшу (функцією платежів)? Що у теорії ігор називають ситуацією рівноваги?
10. Яка парна гра називається грою з нульовою сумою? Яку парну гру з нульовою називають матричною?
11. Коли матрична гра має сідлову точку у чистих стратегіях?
12. Чому елементи теорії ігор знаходять своє застосування при розв'язанні задач агропромислового спрямування?
13. Наведіть приклад задачі теорії ігор, що може мати місце у природокористуванні.
14. Назвіть способи розв'язання матричної гри.
15. У чому суть приведення задачі теорії ігор до задачі лінійного програмування?

Список рекомендованої літератури:

1. Булига К. Б. Комп'ютерний практикум із застосуванням математичних методів в економіці / К. Б. Булига, В.М. Міхайленко. – К.: Європейський університет фінансів, інформаційних систем, менеджменту і бізнесу, 2000. – 67 с.
2. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / А.М.Гатаулин. – М.: Агропромиздат, 1990.
3. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике / П.Конюховский. – Санкт-Петербург: Питер, 2000. – 208 с.
4. Сибаль Я. Економіко-математичне моделювання в АПК: Навч. посібник / Я. Сибаль. – Львів: Магнолія 2006.– 2013.–277 с.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели / С.И.Шелобаев. – Москва: ЮНИТИ, 2000. – 368 с.

ТЕМА 4. АНАЛІЗ ПРИЧИННО-НАСЛІДКОВИХ ЗВ'ЯЗКІВ У СИСТЕМАХ І ПРОГНОЗУВАННЯ ЇХ РОЗВИТКУ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Тема: Тенденції розвитку систем: моделі тренду для аналізу процесів і явищ та прогнозування стану довкілля засобами Excel. Парна лінійна регресія. Кореляційний аналіз

Мета: Вивчення методів дослідження тенденцій розвитку систем на основі моделей тренду, опанування підходів до визначення параметрів парної лінійної регресії та оцінювання тісноти зв'язку між показником і факторами при аналізі взаємозалежностей у системах засобами табличного процесора Microsoft Excel

Завдання:

1. Підготовка статистичних даних щодо стану навколишнього середовища, введення їх у чарунки табличного процесора Microsoft Excel та візуальне відображення за допомогою графіків і діаграм.
2. Застосування можливостей табличного процесора Microsoft Excel для побудови ліній тренду.
3. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності. Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції.
4. Оцінка параметрів лінійної залежності із використанням надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel.
5. Встановлення ступеня тісноти зв'язку між показником і факторами у багатофакторних залежностях із використанням можливостей надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер, із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel, та під'єднанням до мережі Internet

Короткий теоретичний коментар

Трендова модель прогнозування – це рівняння, що формалізує закономірності розвитку показника у базисному періоді. Модель застосовується у тому випадку, якщо встановлено, що знайдені закономірності будуть діяти на деякому відрізку часу в майбутньому.

Excel – це табличний процесор, призначений для автоматизації проведення різноманітних розрахунків, аналізу і представлення статистичної, фінансової, економічної та іншої інформації. Вона складається з таблиць, в яких безпосередньо можна проводити калькуляції. Excel також дозволяє вводити та формувати текстову інформацію для оформлення документації, підтримує обробку, вибірку та фільтрацію даних, що задані у вигляді списку (база даних).

Одним із методів короткострокового прогнозування попиту є трендова модель, основою якої також є часові ряди (ряди динаміки). Їх вивчення – це важливий розділ досліджень економічної динаміки часу.

Ряди динаміки можуть бути у вигляді: тренда, лага чи періодичних коливань.

Рівняння регресії – це аналітичне рівняння, за допомогою якого можна виразити взаємозв'язок між ознаками. Тобто це регресійна модель або економіко-математична модель залежності результативної ознаки від факторної (факторних).

Залежність результуючого показника від значення одного фактора виражається залежністю виду

$$y = a + bx \quad (4.1)$$

У багатьох випадках при дослідженні становища системи на результативну ознаку впливає не один, а кілька факторів. Між факторами існують складні взаємозв'язки, тому їхній вплив на результативну ознаку є комплексним, а не просто сумою ізольованих впливів.

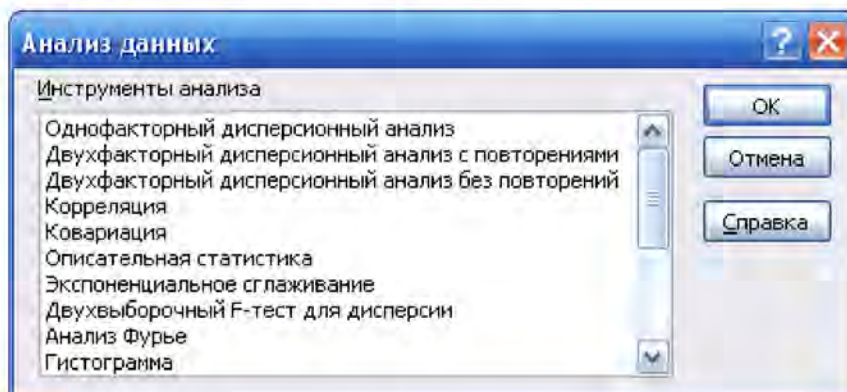
Багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз дає змогу оцінити міру впливу на досліджуваний результативний показник кожного із введених у модель факторів при фіксованому положенні на середньому рівні інших факторів.

З практичного досвіду відомо, що залежності такого виду можуть бути описані багатофакторною лінійною виробничою функцією типу:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \quad (4.2)$$

Основна задача багатофакторної виробничої регресії – це дослідження впливу основних факторів на результат діяльності системи.

Excel має надбудову Пакет аналізу, що дозволяє проводити різні типи статистичних аналізів і на їх основі складати прогнози.



Порядок і методика виконання завдань

1. Підготовка статистичних даних щодо стану навколишнього середовища, введення їх у чарунки табличного процесора Microsoft Excel та візуальне відображення за допомогою графіків і діаграм.

Для аналізу стану та розвитку будь-якої системи необхідні вхідні дані. Вони можуть бути відображені у певних звітах, літературі, отримані за результатами натурних спостережень тощо. Джерелом даних для дослідження і аналізу стану навколишнього середовища може бути статистична інформація з офіційного сайту Державної служби статистики України

<http://www.ukrstat.gov.ua>

Статистична інформація на даному сайті згрупована по категоріях і за відповідними посиланнями відкривається у формі таблиць, що є зручним для подальшої роботи. Наведені дані можна скопіювати в буфер обміну, а далі вставити у новий документ обраного програмного додатку (з обов'язковим вказанням джерела даних). Більше того, для зручності роботи, на сайті є можливість завантажити окремі дані у вигляді табличного документу табличного процесора Excel.

Звичайно, дані, отримані не з електронних джерел для подальшої їх обробки доведеться вводити безпосередньо із клавіатури.

Якщо для роботи з наявними числовими даними обрано табличний процесор Excel, то кожне число з вибірки даних слід вводити в окрему чарунку.

При введенні даних в Excel, що відповідають якій-небудь послідовності, та копіюванні формул доцільно користуватися засобом **Автозаповнення**. Для застосування цього засобу слід встановити покажчик миші на *маркер заповнення*, що знаходиться в нижньому правому кутку табличного курсору, та розтягнути, утримуючи натиснутою ліву кнопку миші.

Аркуші нової робочої книги мають імена Лист1, Лист2 і т.д. Це не дуже інформативно. Аркушам, на яких міститься певна інформація, доцільно надавати таке ім'я, що буде відображати зміст цього аркушу. Для перейменування аркушу слід виконати подвійне клацання на ярлику аркуша, ввести відповідне ім'я та натиснути клавішу [**Enter**].

Для візуального відображення числових даних MS Excel надає можливість побудувати різного типу графіки та діаграми. Дані дії відбуваються за командою стрічки **Вставка** ⇒ **Діаграми** (користувачу необхідно обрати потрібний тип діаграми). Для дослідження процесів у динаміці доцільно обирати діаграми типу графік, гістограма, лінійна діаграма тощо.

Побудовану діаграму надалі можна відредагувати (змінити або додати / видалити дані, змінити її місцезонаштування тощо) або ж відформатувати. Для виконання означених дій використовуються кнопки стрічок **Конструктор**, **Макет**, **Формат** (команди пункту меню Діаграма)

2. Застосування можливостей табличного процесора Microsoft Excel для побудови ліній тренду.

Одним із найпростіших методів складання прогнозів є побудова графіка функції, що автоматично підібрана для найбільш точного опису процесу чи явища – побудова лінії тренду.

Для побудови лінії тренду з метою складання прогнозу необхідно за вихідними даними побудувати графік. Далі виділити побудований графік і з контекстного меню обрати команду **Добавить линию тренда**.

Далі слід обрати:

- тип лінії тренду (наприклад, *Лінійну*),
- задати параметри тренду (у даній задачі – кількість періодів для прогнозу, виведення рівняння тренду, виведення значення величини достовірності апроксимації R^2).

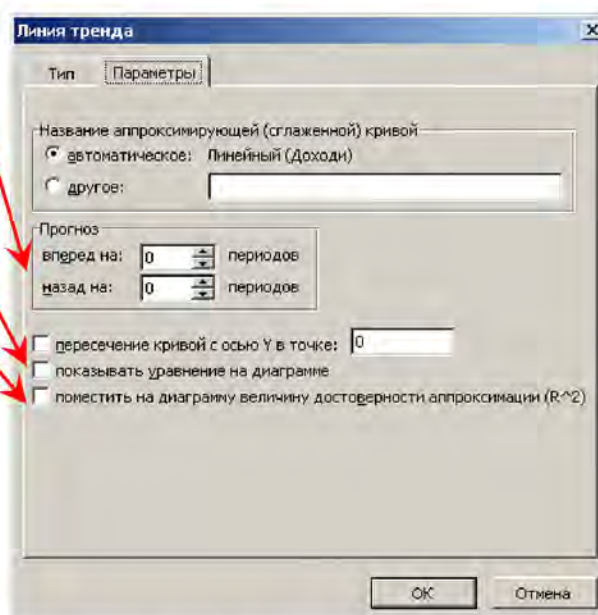
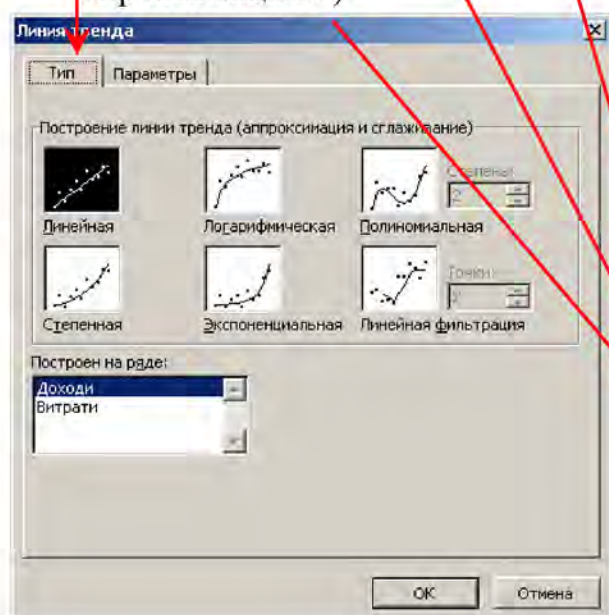
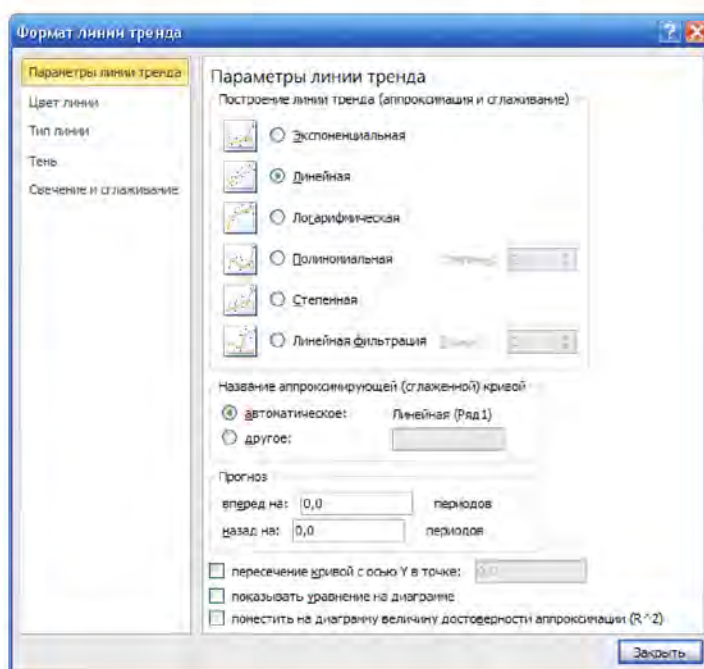
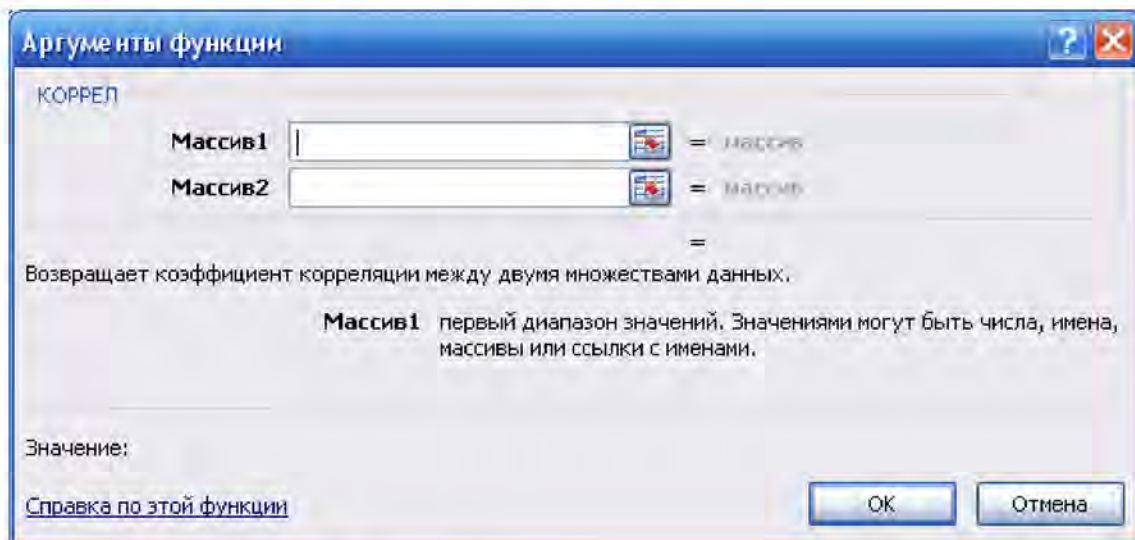


Рис. 4.1. Побудова лінії тренду

3. *Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності. Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції.*

Для встановлення ступеня тісноти зв'язку між фактором і показником обчислюють значення коефіцієнта кореляції, використовуючи вбудовану статистичну функції =КОРРЕЛ().



Аргументи функції КОРРЕЛ:

Массив1 – стовпець статистичних даних показника Y;

Массив2 – стовпець статистичних даних фактора X.

Для обчислення параметрів лінійної залежності можна використати вбудовану статистичну функцію =ЛИНЕЙН(). Перш ніж скористатися даною функцією, попередньо необхідно виділити діапазон для занесення результату обчислень (довільний діапазон десятих чарунок із п'яти рядків і двох стовпчиків).

Аргументи функції ЛИНЕЙН:

Известные_значения_y – блок відомих значень показника Y;

Известные_значения_x – блок відомих значень фактора X;

Конст – визначає наявність вільного члена у рівнянні регресії (1);

Статистика – задає обчислення додаткових статистичних показників (1);

Після введення аргументів функції ініціалізація обчислень починається натисканням комбінації клавіш <Ctrl><Shift>+<Enter>.

Аргументы функции

ЛИНЕЙН

Известные_значения_y = ссылка

Известные_значения_x = ссылка

Конст = логическое

Статистика = логическое

=

Возвращает параметры линейного приближения по методу наименьших квадратов.

Известные_значения_y множество значений y, для которых уже известно соотношение $y = mx + b$.

Значение:

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

Результати розрахунку за даною функцією:

i	l	0	
a_i			
Se a_i			
$R^2 =$			=Se y
$F_{\text{розр}} =$			=Df
SSR =			=SSE

Для визначення адекватності побудованої моделі слід обчислити табличне (критичне) значення критерію Фішера, використовуючи вбудовану статистичну функцію =FРАСПОБР() (у новіших версіях =F.ОБР()).

Аргументи функції FРАСПОБР (у новіших версіях F.ОБР):

Вероятность – рівень ймовірності випадкового одержання високого значення R^2 (0,05);

Степени_свободы1 – кількість незалежних змінних (факторів) у рівнянні регресії (для парної лінійної регресії –1);

Степени_свободы2 – кількість ступенів вільності (n-m-1) розраховане як кількість спостережень – кількість незалежних змінних – 1;

Надалі $F_{\text{розр}}$ порівнюють із $F_{\text{кр}}$ і приймають рішення щодо адекватності моделі: якщо $F_{\text{розр}} > F_{\text{кр}}$ – з надійністю $P=0,95$ економетричеу модель можна вважати адекватною вихідним даним і на її підставі можна проводити прогнозування зміни досліджуваного показника в залежності від зміни фактора.

Для визначення істотності коефіцієнта кореляції обчислюють табличне значення t-статистики, використовуючи вбудовану статистичну функцію =СТЮДРАСПОБР() (у новіших версіях =СТЮДЕНТ.ОБР())

Аргументи функції СТЮДРАСПОБР (у новіших версіях СТЮДЕНТ.ОБР):

Вероятность – рівень ймовірності випадкового одержання високого значення R^2 (0,05);

Степени_свободы – кількість ступенів вільності (n-m-1) розраховане як кількість спостережень – кількість незалежних змінних – 1;

Розрахункові значення критерію Стюдента для кожного з параметрів обчислюють за формулою $t_{\text{диск}} = \frac{\hat{a}_s}{\text{Se}\hat{a}_s}$.

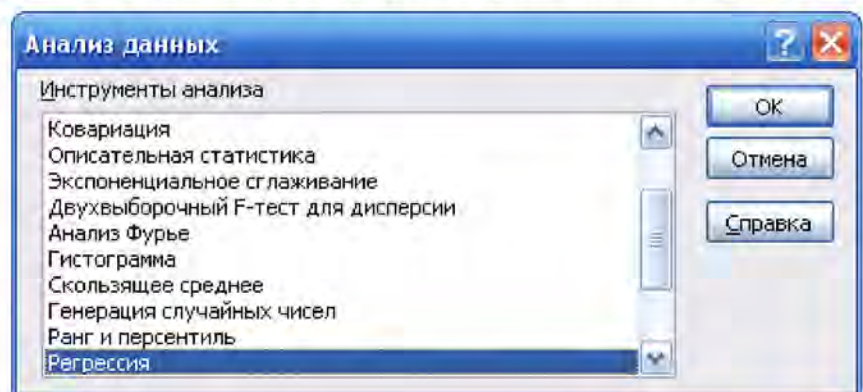
Розрахункове значення t-статистики визначається за формулою

$$t_{\text{диск}} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \text{ де } r - \text{коефіцієнт кореляції, и}$$

Надалі отримане розрахункове значення t-статистики порівнюють із $t_{\text{кр}}$ і приймають остаточне рішення щодо істотності коефіцієнта кореляції (якщо $t_{\text{розр}} > t_{\text{кр}}$, з надійністю $P=0,95$ можна зробити висновок про значимість коефіцієнта кореляції).

4. Оцінка параметрів лінійної залежності із використанням надбудови Пакет анализа у Microsoft Excel.

Табличний процесор Microsoft Excel має надбудову **Пакет анализа**, що дозволяє використовувати низку інструментів аналізу статистичних даних. Зокрема, розрахувати параметри лінійної залежності дозволяє інструмент аналізу **Регресія**. У результаті аналізу будуть автоматично розраховані та виведені значення регресійної статистики (значення коефіцієнта кореляції R, стандартна похибка, кількість спостережень тощо); показники дисперсійного аналізу (F критерій Фішера, коефіцієнти у формулі парної лінійної регресії, t-статистика і т.д.)



Для обчислення параметрів парної лінійної регресії необхідно:

- пересвідчитися, чи увімкнена надбудова **Пакет аналіза** (чи доступна на стрічці **Данные** кнопка **Анализ данных**). За відсутності такої увімкнути потрібну надбудову за командою **Файл** ⇒ **Параметры** ⇒ **Надстройки** ⇒ **Перейти** ☒ **Пакет аналіза**;
- виконати команду **Анализ данных** ⇒ **Регрессия** стрічки **Данные** (**Сервис** ⇒ **Анализ данных** ⇒ **Регрессия**) і натиснути ;
- в активному вікні **Регрессия**, що з'явиться на екрані, задати всі необхідні опції: вказати діапазон вхідних значень показника Y, діапазон вхідних значень фактора X, обрати для виведення результату новий робочий аркуш і натиснути
- проаналізувати отриманий результат.

5. *Встановлення ступеня тісноти зв'язку між показником і факторами у багатофакторних залежностях із використанням можливостей надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel.*

Серед можливостей Пакета аналіза табличного процесора Microsoft Excel є інструмент **Корреляция**, що дозволяє обчислити тісноту зв'язку між показником і фактором.

Щоб обчислити означені показники, слід виконати команду **Анализ данных** ⇒ **Корреляция** стрічки **Данные** (**Сервис** ⇒ **Анализ данных** ⇒ **Корреляция** в більш ранніх версіях), у вікні **Корреляция**, що з'явиться на екрані, задати вхідний діапазон значень результуючого показника і факторів, обрати новий аркуш для результату і натиснути . Проаналізувати результат.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Завдання 1:

на основі статистичних даних показника Y за певний період провести економетричний аналіз зміни показника в часі, побудувати чотири моделі тренду за допомогою засобів MS Excel

Вправа 1. Підготовка статистичних даних щодо стану навколишнього середовища, введення їх у чарунки табличного процесора Microsoft Excel та візуальне відображення за допомогою графіків і діаграм

1. Користуючись довільною програмою-браузером, відкрити сайт Державної служби статистики України
<http://www.ukrstat.gov.ua>
2. Відшукати статистичну інформацію *Про навколишнє середовище*.
3. Відкрити сторінку про *Основні показники використання та охорони водних ресурсів* та ознайомитися із наведеною інформацією.
4. Завантажити табличний процесор Microsoft Excel.
5. Скопіювати таблицю про *Основні показники використання та охорони водних ресурсів* на *Лист 1* нової книги.

	А	Б	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1	Основні показники використання та охорони водних ресурсів¹							
2								(млн.м ³)
3					У тому числі			
4		Забрано води з природних водних об'єктів ²	Спожито свіжої води ²	Загальне відведення зворотних вод	забруднених (недостатньо очищених)		нормативно очищених	Потужність очисних споруд
5					усього	з них без очищення		
6	1990	35615	30201	20261	3199	470	3318	8131
7	1991	34905	28206	19126	4291	701	2532	7937
8	1992	32461	26924	17872	4008	951	3207	8854
9	1993	24380	24521	16650	4652	1196	2611	8134
10	1994	29499	23468	15869	4873	1053	2075	8775
11	1995	25852	20338	14981	4652	912	1936	8419
12	1996	23477	18668	13998	4109	980	2304	8281
13	1997	21091	15623	12534	4233	763	1798	8271
14	1998	19027	13836	11040	4228	813	1644	8284
15	1999	19748	14285	11488	3920	748	1743	8018
16	2000	18282	12991	10964	3313	758	2100	7992
17	2001	17577	12168	10569	3008	746	2188	7790
18	2002	16299	11589	10005	2920	782	2111	7546
19	2003	15039	11034	9459	2948	804	1946	7733
20	2004	14694	9973	9065	3326	758	1492	7740
21	2005	15083	10188	8900	3444	896	1315	7688
22	2006	15327	10245	8824	3891	1427	1304	8104
23	2007	16352	10995	8917	3854	1506	1245	7768
24	2008	15729	10265	8655	2728	616	1357	7518
25	2009	14478	9513	7692	1766	270	1711	7581
26	2010	14846	9817	8141	1744	312	1760	7425
27	2011	14651	10086	8044	1612	309	1763	7687
28	2012	14651	10507	8081	1521	292	1800	7577
29	2013	13625	10092	7722	1717	265	1477	7592
30	2014	11505	8710	6587	923	175	1416	7190
31	2015	9699	7125	5581	875	184	1389	5801

6. Перейменувати аркуш *Лист 1* на аркуш *Статистика*.

	А	В	С	Д	Е
1	Об'єм забраної води з природних водних об'єктів, млн.т³				
2					
3	Роки	Xi	Yi	Урознр	
4	1990	1	35615		
5	1991	2	34905		
6	1992	3	32461		
7	1993	4	24380		
8	1994	5	29499		
9	1995	6	25852		
10	1996	7	23477		
11	1997	8	21091		
12	1998	9	19027		
13	1999	10	19748		
14	2000	11	18282		
15	2001	12	17577		
16	2002	13	16299		
17	2003	14	15039		
18	2004	15	14694		
19	2005	16	15083		
20	2006	17	15327		
21	2007	18	16352		
22	2008	19	15729		
23	2009	20	14478		
24	2010	21	14846		
25	2011	22	14651		
26	2012	23	14651		
27	2013	24	13625		
28	прогноз-1	25			
29	прогноз-2	26			
30	прогноз-3	27			
31					
32	Пояснення: Xi - порядковий номер спостереження				
33	Yi - фактичні значення об'єму забраної води;				
34	Урознр - розрахункові значення об'єму забраної				
	Статистика	Вихідні дані			

7. Перейменувати аркуш *Лист 2* на аркуш *Вихідні дані*.

8. На аркуші *Вихідні дані* створити макет таблиці для аналізу одного показника за декілька років.

Наприклад, проаналізуємо Об'єм забраної води з природних водних об'єктів за 1990–2013 рр.* і побудуємо прогноз на 3 роки.

9. Для аналізу даних про Об'єм забраної води з природних водних об'єктів скопіювати статистичні дані за 1990 – 2013 рр. з аркушу *Статистика* на аркуш *Вихідні дані*.

10. Відформатувати таблицю на аркуші *Вихідні дані*, відповідно до наведеного зразка.

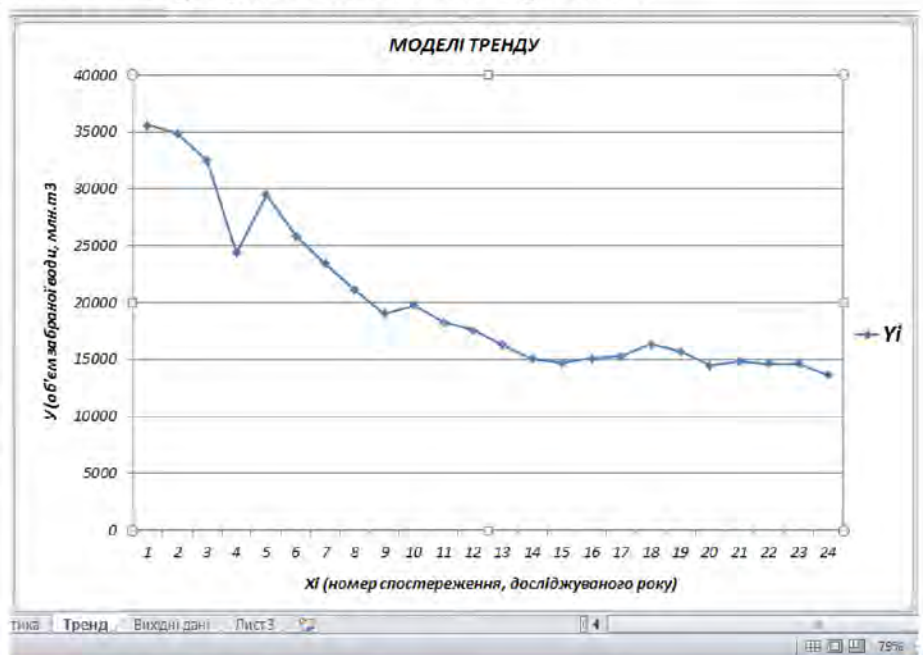
11. За командою *Вставка* ⇒ *Діаграма* побудувати *Графік* з маркерами на основі фактичних даних показника *Yi* (Об'єм забраної води з природних водних об'єктів).

12. Розмістити діаграму на окремому аркуші, якому надати ім'я *Тренд*.

13. Відформатувати побудований графік за наведеним зразком.

14. Забезпечити виведення на графіку назви діаграми, підписів вздовж осей, легенди.

15. Зберегти результати роботи у Вашій папці диску *D:* з іменем *laboratorna_4.xlsx*.



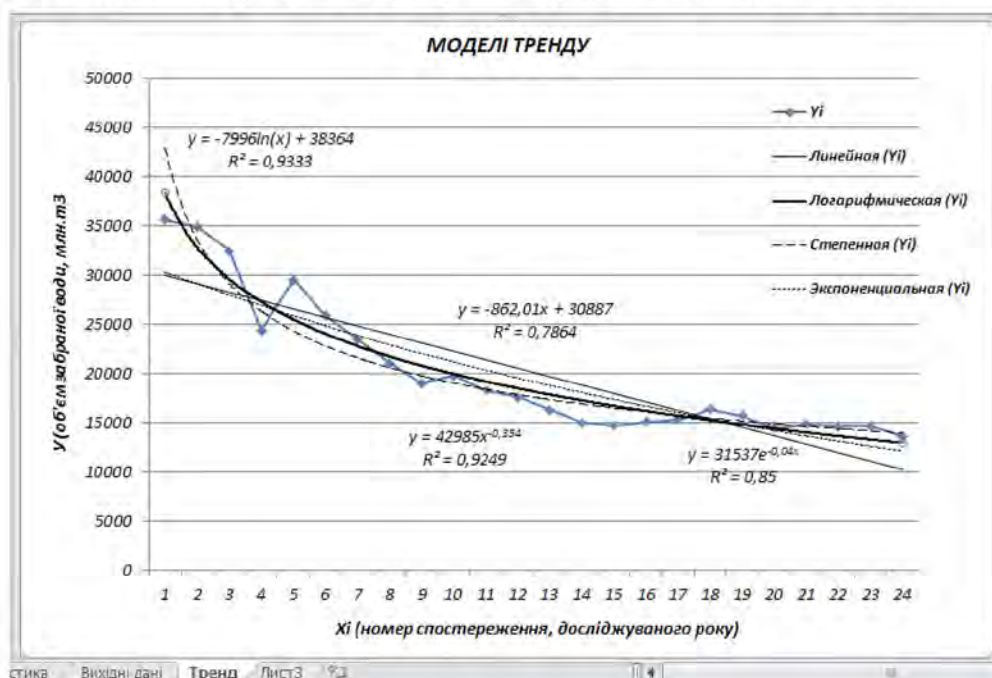
* Починаючи з 2014 року більшість статистичних даних наводяться без урахування даних по тимчасово окупованих територіях, що вносить суттєві похибки у статистичний аналіз даних. Тому для актуальних досліджень доцільно використовувати дані за 2014 рік і пізніше. Для навчання ж беремо вибірку з більшою кількістю елементів.

Вправа 2. Застосування можливостей табличного процесора Microsoft Excel для побудови ліній тренду

1. Активізувати аркуш *Тренд*.
2. На графіку показника Y_i (Об'єм забраної води з природних водних об'єктів), побудувати лінійний тренд.

Для цього:

- виділити натисканням ЛКМ графік;
 - із контекстного меню обрати команду *Добавить линию тренда*;
 - у діалоговому вікні *Линия тренда* обрати відповідний тип лінії тренду (для лінійного тренду – *Линейная*);
 - у діалоговому вікні *Линия тренда* встановити параметри
 - ☒ показывать уравнение на диаграмме;
 - ☒ поместить на диаграмму величины достоверности аппроксимации (R^2)
 - обрати колір лінії тренду і закрити вікно *Линия тренда*.
3. Розмістити підпис рівняння тренду у зручному місці в області діаграми та обрати для нього більший розмір шрифту.
 4. Аналогічно на аркуші *Тренд* побудувати логарифмічний, степеневий та експоненційний тренди та зберегти файл *laboratorna_4.xlsx*



5. У файлі *laboratorna_4.xlsx* активізувати аркуш *Вихідні дані*.
6. Створити та заповнити порівняльну таблицю, де вказати отримані значення коефіцієнту детермінації та функціональну залежність для кожної лінії тренду.

Порівняльна таблиця		
Лінія тренду	R^2	Функція
Лінійна	0,7864	$y = -862,01x + 30887$
Логарифмічна	0,9333	$y = -7996\ln(x) + 38364$
Степенева	0,9249	$y = 42985x^{-0,354}$
Експоненційна	0,85	$y = 31537e^{-0,04x}$

7. Визначити за значенням коефіцієнта детермінації найякіснішу модель тренду. Увести обране рівняння для *Урозр* у будь-яку вільну чарунку активного аркушу (наприклад, F10).
8. Для найкращої моделі тренду у таблиці визначити розрахункові значення показника *Урозр* для базисного періоду дослідження (1990-2013 рр.) та прогнозу на наступні три роки (для цього ввести формулу для *Урозр*. у чарунку D4 та за допомогою Автозаповнення, скопіювати формулу на сусідні чарунки діапазону D4:D30).
9. Зробити висновки до роботи та записати їх на аркуші *Вихідні дані*:
 - висновки щодо вибору найкращої моделі тренду та обґрунтування вибору;
 - висновки щодо адекватності вибраної (найкращої) моделі тренду;
 - навести вибрану модель тренду в явному вигляді;
 - оцінити можливість використання моделі для прогнозування та аналізу стану навколишнього середовища, зокрема – *Об'єму забраної води з природних водних об'єктів*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Об'єм забраної води з природних водних об'єктів, млн. т³				Порівняльна таблиця			
2								
3	Роки	Xi	Yi	Урозр		Лінія тренду	R²	Функція
4	1990	1	35615	38364,0		Лінійна	0,7864	$y = -862,01x + 30887$
5	1991	2	34905	32821,6		Логарифмічна	0,9333	$y = -7996\ln(x) + 38364$
6	1992	3	32461	29579,5		Степенева	0,9249	$y = 42985x^{-0,254}$
7	1993	4	24380	27279,2		Експоненційна	0,85	$y = 31537e^{-0,04x}$
8	1994	5	29499	25494,9				
9	1995	6	25852	24037,1		Шукана модель:		
10	1996	7	23477	22804,5		$y = -7996\ln(x) + 38364$		
11	1997	8	21091	21736,8				
12	1998	9	19027	20795,0		Висновки:		
13	1999	10	19748	19952,5		Найкращою серед побудованих ліній тренду є		
14	2000	11	18282	19190,4		логарифмічна модель, оскільки значення		
15	2001	12	17577	18494,7		коефіцієнта детермінації для цієї функції є		
16	2002	13	16299	17854,7		найбільшою.		
17	2003	14	15039	17262,1				
18	2004	15	14694	16710,4		Побудована логарифмічна модель тренду є		
19	2005	16	15083	16194,4		адекватною вхідним даним показника У,		
20	2006	17	15327	15709,6		оскільки значення коефіцієнта детермінації		
21	2007	18	16352	15252,6		R ² =0,9333, що знаходиться в межах 0,75 -		
22	2008	19	15729	14820,3		0,9999 і говорить про високий ступінь		
23	2009	20	14478	14410,1		наближеності математичної моделі вихідним		
24	2010	21	14846	14020,0				
25	2011	22	14651	13648,0		Оскільки логарифмічна модель є адекватною		
26	2012	23	14651	13292,6		(тобто якісною), то її доцільно використовувати		
27	2013	24	13625	12952,3		для прогнозу досліджуваного показника У на		
28	прогноз-1	25		12625,9		майбутні періоди часу		
29	прогноз-2	26		12312,3				
30	прогноз-3	27		12010,5		Відповідно обраної моделі, прогнозні значення		
31						на наступні 2014-2016 рр. складають відповідно		
32	Пояснення Xi - порядковий номер спостереження					12625,9 млн.т ³ , 12312,3 млн.т ³ , 12010,5 млн.т ³		
33	Yi- фактичні значення об'єму забраної води;							
34	Урозр- розрахункові значення об'єму забраної води;							
35								

10. Зберегти внесені зміни у файлі *laboratorna_4.xlsx* та закрити цей файл.

Завдання 2:

Дослідити вплив забруднення атмосферного повітря на стан здоров'я населення (наприклад, вплив викидів оксиду сірки в атмосферу на кількість новоутворень по Україні).

Скласти прогнози зміни кількості виявлених онкозахворювань.

Вправа 3. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності. Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції

1. Користуючись довільною програмою-браузером, відкрити сайт Державної служби статистики України
<http://www.ukrstat.gov.ua>
2. Відшукати статистичну інформацію *Про навколишнє середовище*.
3. Відкрити сторінку про *Основні показники забруднення атмосферного повітря* та ознайомитися із наведеною інформацією.
4. Завантажити табличний процесор Microsoft Excel.
5. Скопіювати таблицю про *викиди сірки в атмосферу* на *Лист 1* нової книги. *Лист1* перейменувати на *Вихідні дані*
6. Відшукати статистичну інформацію *Про здоров'я населення України*.
7. Скопіювати таблицю про *рівень захворюваності населення* на *Лист 2* активної книги.
8. Знайти показники щодо кількості первинних звернень з приводу новоутворень.
9. Скопіювати статистичні показники щодо кількості новоутворень на аркуш *Вихідні дані*, виконавши при необхідності транспонування матриці.
10. Зберегти книгу з іменем *Парна лінійна регресія.xlsx*.

Встановлення ступеня тісноти зв'язку між фактором і показником із використанням вбудованих функцій Excel.

11. Відформатувати таблицю аркушу *Вихідні дані* за наведеним зразком.
12. Встановити курсор у чарунку C23.
13. Ввести формулу $=\text{КОРРЕЛ}(B4:B17;C4:C17)$, використавши вбудовану функцію Excel.

Microsoft Excel - лаб2

Файл Вставка Вид Формат Сервис Данные Окно Справка

Verdana 11 Ж К Ч

A1 Залежність кількості новоутворень від викидів сірки в атмосферу

Залежність кількості новоутворень від викидів сірки в атмосферу				залежність від фактора X			залежність від часу (i)		
i	Yi	Xi		i	1	0	i	1	0
1	382	984,8		ai=	0,082497	308,6737035	ai=	3,747253	380,1099
2	394	992,1		Se ai=	0,016101	19,60680723	Se ai=	0,4455	3,793297
3	382	1032,6		R2=	0,68628	9,883354336	R2=	0,854986	6,719525
4	395	1046,3		Fпрозр=	26,25072	12	Fпрозр=	70,75062	12
5	406	988,5		SSR=	2564,189	1172,168315	SSR=	3194,533	541,8242
6	408	1132,8							
7	414	1347,2		y=	0,082x+308,67		y=	3,74x+380,109	
8	407	1342,6		Fтабл=	4,747225				
9	406	1320,6		t=	5,123546	15,74319061			
10	407	1262,7		t(0,95;12)=					
11	418	1235,2							
12	423	1363,4							
13	433	1430,3							
14	440	1413,3							
15									
16									
17									
18									
19	Xi - викид діоксид сірки								
20	Yi - новоутворень								
21									
22									
23	Ккор=	г _{ух} =	0,82842045						

Статистика Вихідні дані Тренд Регресія всього захв аномалії дихання Лист

Действия Автофигуры

Готово NUM

14. Зробити висновок про ступінь тісноти зв'язку та зберегти файл *Парна лінійна регресія*.

Аналіз причинно-наслідкових зв'язків у системах: обчислення параметрів лінійної залежності

- На аркуші *Вихідні дані*, підготувати діапазон E2:H8 для обчислення параметрів лінійної залежності – виконати форматування цих чарунок за зразком.
- Виділити діапазон F4:H10.
- Вставити функцію `=ЛИНЕЙН(B4:B17;C4:C17;1;1)` і натиснути `<Ctrl><Shift>+<Enter>`. Проаналізувати отримані параметри.
- За аналогією із використанням функції `= ЛИНЕЙН` обчислити параметри лінійної залежності кількості новоутворень від фактора часу у діапазоні K4:M10.
- На окремому аркуші побудувати графік, що відображає кількість новоутворень від фактора часу. Додати лінію тренду (вивести графік лінійної функції, рівняння прямої та коефіцієнт детермінації). Порівняти отримані результати із результатами, отриманими з використанням функції `= ЛИНЕЙН`

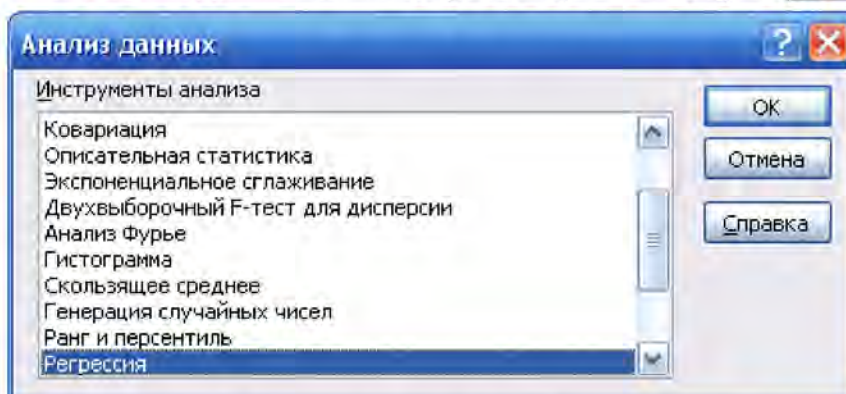
20. Зробити висновок про ступінь тісноти зв'язку та зберегти файл *Парна лінійна регресія*.

Визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції

21. На аркуші *Вихідні дані*, підготувати діапазон E12: G14 для визначення адекватності побудованої моделі та істотності коефіцієнта кореляції.
22. Встановити курсор у чарунку F12 і ввести функцію $=\text{FРАСПОБР}(0,05;1;12)$
23. У чарунку F13 ввести формулу $=\text{F4}/\text{F5}$, а в чарунку G13 формулу $=\text{G4}/\text{G5}$
24. У чарунку F14 вставити функцію $=\text{СТЮДРАСПОБР}(0,05;12)$
25. Зробити висновок про адекватність побудованої моделі та істотність коефіцієнта кореляції за значенням критерію Фішера і критерію Стьюдента.

Вправа 4. Оцінка параметрів лінійної залежності із використанням надбудови *Пакет анализа* у *Microsoft Excel*

1. У табличному процесорі Excel перевірити, чи увімкнена надбудова *Пакет анализа* (пересвідчитися, чи доступна команда **Анализ данных** стрічки **Данные** або команда **Сервис** $\Rightarrow$ **Анализ данных** в більш ранніх версіях).
2. За відсутності вищезгаданої команди, увімкнути надбудову *Пакет анализа* (**Файл** $\Rightarrow$ **Параметры** $\Rightarrow$ **Надстройки** $\Rightarrow$ **Перейти** ☒ **Пакет анализа** або команду **Сервис** $\Rightarrow$ **Надстройки** $\Rightarrow$ **Пакет анализа** у більш ранніх версіях).
3. Виконати команду **Анализ данных** $\Rightarrow$ **Регрессия** стрічки **Данные** (**Сервис** $\Rightarrow$ **Анализ данных** $\Rightarrow$ **Регрессия**) і натиснути **OK**.



4. В активному вікні **Регрессия**, що з'явиться на екрані, задати всі необхідні опції.
5. Утвореному аркушу із результатами регресійного аналізу надати назву *Регресія*.
6. Проаналізувати результат, зробити висновки.

Microsoft Excel - лаб2

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос.

Calibri 11 Ж К Ч

F12 0,000251773788189429

1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	Регрессионная статистика								
4	Множественный R	0,828420449							
5	R-квадрат	0,686280441							
6	Нормированный R-квадрат	0,660137144							
7	Стандартная ошибка	9,883354336							
8	Наблюдения	14							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		df	SS	MS	F	Значимость F			
12	Регрессия	1	2564,188828	2564,188828	26,25072315	0,000251774			
13	Остаток	12	1172,168315	97,68069294					
14	Итого	13	3736,357143						
15									
16		Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95%	Верхние 95%
17	У-пересечение	308,6737035	19,60680723	15,74319061	2,23285E-09	265,9541403	351,3933	265,9541	351,3933
18	Переменная X1	0,082496753	0,016101496	5,123545955	0,000251774	0,047414608	0,117579	0,047415	0,117579
19									
20									
21									
22									
23									

М\Статистика\Вихідні дані\Тренд\Регресія\всього захв\аналіз\дихання\Лист7\Лист

Готово

7. Зберегти документ *Парна лінійна регресія.xlsx* і закрити його.

Вправа 5. Встановлення ступеня тісноти зв'язку між показником і факторами у багатофакторних залежностях із використанням можливостей надбудови Пакет аналіза у Microsoft Excel

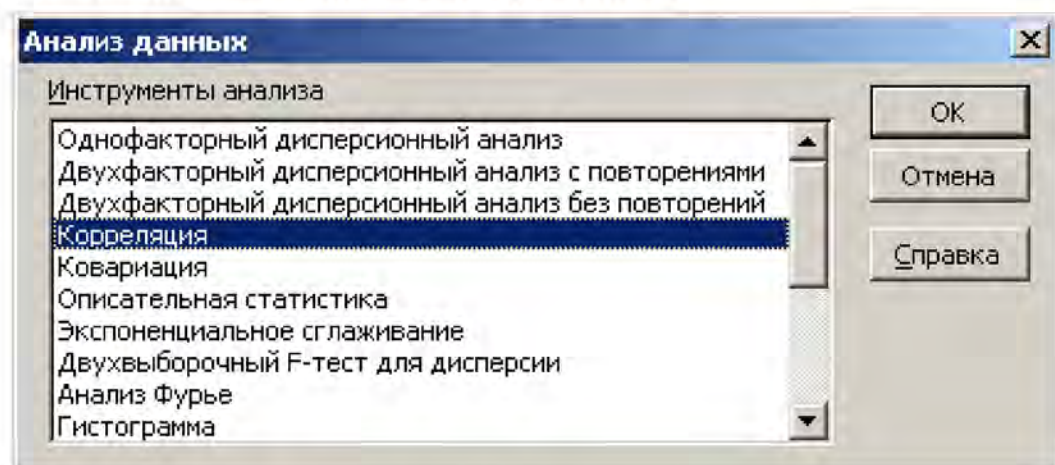
Завдання 3:

Дослідити вплив на вагу бульби площі листової поверхні та кількості пагонів.

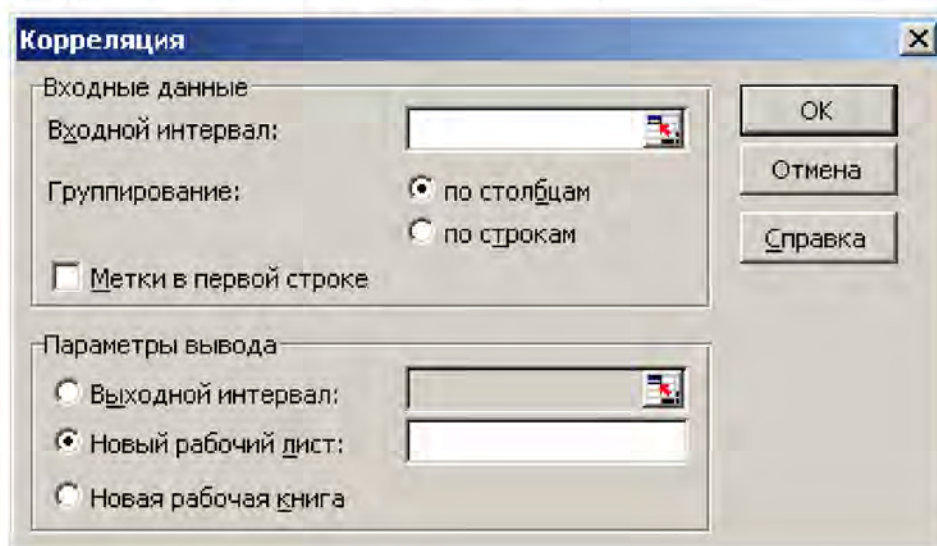
1. Створити новий документ у табличному процесорі Microsoft Excel.
2. Ввести у чарунки Excel на *Лист 1* нової книги вихідні дані до задачі.
3. Переименувати *Лист 1* на *Вихідні дані*
4. Відформатувати створену таблицю на власний розсуд.
5. Зберегти книгу з іменем *Кореляція*.

	А	В	С	Д
1	листова поверхня	кількість погонів	вага бульби	
2	199,5	1	209,7	
3	1987,7	6	184,4	
4	3971,9	8	409,8	
5	4175	3	385,2	
6	6216,2	4	463,8	
7	3141,9	4	199,3	
8	4784,2	6	311,5	
9	4752,1	6	341,2	
10	3597,9	4	238,6	
11	1168,4	4	193,5	
12				
13				

6. Виконати команду **Анализ данных** ⇒ **Корреляция** стрічки **Данные** (**Сервис** ⇒ **Анализ данных** ⇒ **Корреляция**).



7. В активному вікні задати всі необхідні опції.



8. Проаналізувати результат, зробити висновки про тісноту зв'язку між результативною та факторними ознаками.

	А	В	С	Д	Е
1		листова поверхня	кількість погонів	вага бульби	
2	листова поверхня	1			
3	кількість погонів	0,429018678	1		
4	вага бульби	0,812626396	0,298020936	1	
5					

Кореляція / Лист1 / Лист2 / Лист3

9. Зберегти документ *Кореляція* і завершити роботу з табличним процесором.
10. Виконану роботу продемонструвати викладачу та в позааудиторний час оформити звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу, який розташовується вертикально (при цьому залишаються такі поля: ліворуч – 30 мм, праворуч – 15 мм, зверху – 20 мм, знизу – 20 мм; розмір шрифту – 14 пт., міжрядковий інтервал – полуторний).

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері результуючі документи, що отриманий після виконання завдань (аркуш *Вихідні дані* та аркуш *Тренд* файлу *laboratorna_4.xlsx*, аркуш *Вихідні дані* та аркуш *Регресія* файлу *Парна лінійна регресія.xlsx*, аркуш *Вихідні дані* та аркуш *Кореляція* файлу *Парна лінійна регресія.xlsx* Вашої папки диску D:\).

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Розкрийте поняття та призначення лінії тренда.
2. Як в Microsoft Excel додати до графіка лінію тренда?

3. Якого параметричного виду можна будувати тренди в Microsoft Excel?
4. За яким критерієм обирається найякісніша модель?
5. Чи можна на основі моделей тренда отримати прогностні значення досліджуваного показника щодо стану навколишнього середовища?
6. Що називають парною лінійною регресією?
7. Навіщо розраховувати параметри парної лінійної регресії?
8. Які вбудовані функції Excel дозволяють оцінити адекватність моделі?
9. Як обчислюється тіснота зв'язку між показниками в Excel?
10. Розкрити технологію роботи з Пакетом аналізу табличного процесора Microsoft Excel.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в экологии: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
6. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 5. МОДЕЛЮВАННЯ ОСНОВНИХ ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ФУНКЦІОНУВАННЯ ВОДНИХ ЕКОСИСТЕМ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Тема: Розрахунки концентрації забруднюючих речовин в басейні стічних вод. Дослідження динаміки БПК та РК

Мета: Ознайомитися з елементами математичного моделювання основних гідроекологічних процесів і функціонування водних екосистем

Завдання:

1. Ознайомитися з основними підходами щодо математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів. Виконати числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.
2. З'ясувати алгоритм математичної моделі динаміки органічної речовини та розчиненого кисню в басейні самоочищення та розв'язати тестовий приклад.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

В екології постають задачі моделювання гідроекологічних процесів і функціонування водних екосистем; моделювання і прогнозування забруднення атмосфери, забруднення ґрунтового та рослинного середовища; моделювання чисельності популяцій тощо. При моделюванні більшості екологічних процесів застосовуються диференціальні рівняння.

Математичне та імітаційне моделювання ефективні при дослідженні та прогнозуванні стану водних екосистем та якості води в умовах антропогенного впливу. Так, концентрація у воді розчиненого кисню (РК) є одним із основних інтегральних показників, що характеризують якість поверхневих вод як одного із найцінніших природних ресурсів. Оскільки між кількістю (концентрацією) у воді розчиненого кисню і наявністю органічної речовини існує тісний зв'язок, важливе значення при дослідженні гідробіологічних і гідрохімічних процесів набуває використання математичних моделей РК і БПК.

Класичними результатами у сфері математичного моделювання кисневого режиму і динаміки органічної речовини у воді є дослідження Стрітера і Фелпса. Запропоновані ними математичні моделі описують кінетику трансформації у воді легко окислювальної органічної речовини і динаміку розчиненого у воді кисню без урахування процесів розбавлення і водообміну:

$$\frac{d\tilde{N}_{AIE}}{dt} = -k_1 \tilde{N}_{AIE} \quad \frac{d\tilde{N}_{PE}}{dt} = k_2 (\tilde{N}_{PE}^* - \tilde{N}_{PE}) - k_1 C_{AIE}$$

Однак і в межах точкової моделі можна врахувати процеси розбавлення, якщо вважати, що воно відбувається за рахунок миттєвих процесів турбулентного перемішування води в басейні певного об'єму W . Моделі з урахуванням миттєвого перемішування розглянуті при описуванні гідрохімічного режиму.

Більш детально інформацію про динамічні моделі викладено в літературі.

Порядок і методика виконання завдань

1. Ознайомитися з основними підходами щодо математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів. Виконати числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.

Для ефективного математичного моделювання та прогнозування гідрохімічного й водного режимів різних водних об'єктів, як річок, так і водосховищ, використовується модель, основою якої є формула визначення концентрації забруднення для неконсервативної речовини, записана в такому вигляді:

$$c_{\beta}^{ij}(t) = c_{\beta}^{*ij} + (c_{\beta}^{ij} - c_{\beta}^{*ij}) \exp \left(- \frac{1 + \beta^{ij} \tau_0^i}{\tau_0^i} t \right), \quad (5.1)$$

де

$$c_{\beta}^{*ij} = \frac{q^{i-1} c^{i-1,j} + q_{\phi}^i c_{\phi}^{ij} + \sum_{k=1}^n q_k^i c_k^{ij} + q_{on}^i c_{on}^{ij} + m_{on}^{ij}}{(1 + \beta^{ij} \tau_0^i) \left(q^{i-1} + q_{\phi}^i + \sum_{k=1}^n q_k^i + q_{on}^i - q_{sun}^i \right)}, \quad (5.2)$$

$$\tau_0^i = \frac{W_0^i}{q^{i-1} + q_{\phi}^i + \sum_{k=1}^n q_k^i + q_{on}^i - q_{sun}^i}, \quad \beta^{ij} = \alpha^{ij} + \lambda^j \quad (5.3)$$

Балансові рівняння та імітаційна математична модель широко застосовується на практиці, зокрема, для розрахунку концентрації речовини, що забруднює водний об'єкт протягом такого відрізка часу, за який зовнішні значення витрат води, концентрацій та інших допоміжних величин можна вважати сталими.

Такі обчислення можна виконати стосовно басейну стічних вод об'ємом $W_0=Q$ (м³), до якого надходять стоки з витратою q_1 (м³/доба) і концентрацією в них солей c_1 (г/м³). Виникає задача визначення динаміки концентрації $c_0(t)$ солей в басейні, якщо початкова концентрація солей в басейні була c_0 , а рівень води в ньому не змінюється ($q_1=q_2$). Для розрахунку можна скористатися формулою (5.1), яку записують у такому вигляді

$$c_0(t) = c_1 + (c_0 - c_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right), \quad \tau_0 = \frac{Q_0}{q_1} \quad (5.4)$$

Її можна переписати так:

$$c_0^*(t) = c_1^* + (1 - c_1^*) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right), \quad \text{де} \quad (5.5)$$

$c_0^* = \frac{c_0}{c_1}$, $c_1^* = \frac{c_1}{c_0} = k$ — безрозмірні (зведені) величини, що визначають концентрацію солей у басейні і в стічних водах через початкову концентрацію c_0 .

$\tau_0 = \frac{Q_0}{q_1}$ — час повного оновлення води в басейні, що характеризує водообмін за умови не перемішування води в басейні.

Величину $k = \frac{c_1}{c_0}$ називають коефіцієнтом (кратністю) розбавлення або змішування.

При побудові графіка зміни концентрації солей в басейні стічних вод враховують наступне:

- при $t \rightarrow \infty$ функція прямує до сталої величини $c_1^* = k$, $c_0^*(t) \rightarrow k$, графік має асимптоту $c_0^* = c_1^* = k$;
- при $k = c_1^* > 1$ ($c_1 > c_0$) функція c_0^* зростає $\frac{dc_0^*}{dt} > 0$ і опукла вгору $\frac{d^2 c_0^*}{dt^2} < 0$;
- при $k = c_1^* < 1$ ($c_1 < c_0$) функція c_0^* спадає $\frac{dc_0^*}{dt} < 0$ і стає вогнутою (опуклою вниз) $\frac{d^2 c_0^*}{dt^2} > 0$.

Для побудови графіка знаходять координати деяких найхарактерніших для графіка точок кривої.

2. З'ясувати алгоритм математичної моделі динаміки органічної речовини та розчиненого кисню в басейні самоочищення та розв'яжіть тестовий приклад.

Математичні моделі динаміки органічної речовини і розчиненого у воді кисню з урахуванням процесів розбавлення і водообміну записують у вигляді диференціальних рівнянь відносно мас цих речовин.

Концентрації *органічних речовин* (БПК – біологічна потреба кисню), що легко окислюються (розкладаються мікроорганізмами) $C_{\text{БПК}}(t)$ і концентрації *розчиненого кисню* у воді $C_{\text{РК}}(t)$ в басейні самоочищення (в озері, ставку або в водосховищі) визначають за допомогою формул (5.6) – (5.10).

$$C_{\text{БПК}}(t) = \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} + [C_{\text{БПК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}] \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right) \quad (5.6)$$

де рівноважна (середня зважена) концентрація органічних речовин у воді визначається рівностями

$$\bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} = \frac{\bar{C}_{\text{БПК}}}{1 + \alpha\tau}, \quad \bar{C}_{\text{БПК}} = \frac{Q}{q}, \quad Q = \sum_{i=1}^n C_{\text{БПК}}^i q_i, \quad q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (5.7)$$

а прискорений період водообміну визначається рівністю

$$\tau_{\alpha} = \frac{\tau}{1 + \alpha\tau}, \quad \tau = \frac{W}{q}. \quad (5.8)$$

У випадку консервативних (біологічно жорстких) органічних речовин у формулах (5.6)–(5.8) потрібно покласти $\alpha=0$

$$C_{\text{РК}}(t) = C_{\text{РК}}^{\text{СТ}} + \left[C_{\text{РК}}^{(0)} - C_{\text{РК}}^{\text{СТ}} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (C_{\text{БПК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}) \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\beta}}\right) + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} (C_{\text{БПК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right),$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\tau}{1 + \alpha\tau}, \quad \tau_{\beta} = \frac{\tau}{1 + \beta\tau}, \quad (5.9)$$

$$C_{\text{РК}}^{\text{СТ}} = \bar{C}_{\text{РК}}^{\beta} + \frac{\beta\tau}{1 + \beta\tau} C_{\text{РК}}^* - \frac{\alpha\tau}{1 + \alpha\tau} \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha}, \quad (5.10)$$

де позначено

$$\bar{C}_{\text{РК}} = \frac{R}{q}, \quad \bar{C}_{\text{РК}}^{\beta} = \frac{\bar{C}_{\text{РК}}}{1 + \beta\tau}, \quad \bar{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} = \frac{\bar{C}_{\text{БПК}}}{1 + \alpha\tau}$$

Обчислення концентрацій доцільно проводити в певній послідовності (за певним алгоритмом), причому спочатку *обчислюють постійні величини*, деякі з них визначають важливі фізичні і біохімічні характеристики процесів самоочищення. Невідомі числові характеристики процесу забруднення і самоочищення та концентрації БПК і РК обчислюють за таких вихідних (заданих)

величин: $C_{\text{БПК}}^{(0)}$, $C_{\text{РК}}^{(0)}$, β , W , $C_{\text{БПК}}^k$, $q_{\text{БПК}}^k$, $C_{\text{РК}}^k$, n .

Обчислення постійних величин слід проводити в такій послідовності:

$$1. \quad \bar{C}_{\text{БПК}} = \frac{Q}{q}, \quad Q = \sum_{k=1}^n C_{\text{БПК}}^k q_k, \quad q = \sum_{k=1}^n q_k$$

$$2. \quad \bar{C}_{\text{РК}} = \frac{R}{q}, \quad R = \sum_{k=1}^n C_{\text{РК}}^k q_k$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \tau &= \frac{W}{q}, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\tau}{1 + \alpha\tau}, \quad \tau_{\beta} = \frac{\tau}{1 + \beta\tau} \\
4. \quad \overline{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} &= \frac{\overline{C}_{\text{БПК}}}{1 + \alpha\tau} \\
5. \quad \Delta C_{\text{БПК}}^{(0)} &= C_{\text{БПК}}^{(0)} - \overline{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} \\
6. \quad \delta &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \Delta C_{\text{БПК}}^{(0)} \\
7. \quad \overline{C}_{\text{РК}}^{\beta} &= \frac{\overline{C}_{\text{РК}}}{1 + \beta\tau} \\
8. \quad C_{\text{РК}}^{\text{СТ}} &= \overline{C}_{\text{РК}}^{\beta} + \beta\tau_{\beta} C_{\text{РК}}^{\star} - \alpha\tau_{\alpha} \overline{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} \\
9. \quad \Delta C_{\text{РК}}^{(0)} &= C_{\text{РК}}^{(0)} - C_{\text{РК}}^{\text{СТ}} \\
10. \quad \gamma &= \Delta C_{\text{РК}}^{(0)} - \delta
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Після обчислення постійних величин (5.11) динаміку БПК і РК означають за такими рівностями:

$$C_{\text{БПК}}(t) = \overline{C}_{\text{БПК}}^{\alpha} + \Delta C_{\text{БПК}}^{(0)} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right) \tag{5.12}$$

$$C_{\text{РК}}(t) = C_{\text{РК}}^{\text{СТ}} + \delta \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\alpha}}\right) + \gamma \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\beta}}\right) \tag{5.13}$$

3. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_5.xlsx*.

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Вправа 1. Ознайомлення з основними підходами щодо математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів. Виконання числових розрахунків концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту

1. В рамках ознайомлення з основами математичного моделювання гідроекологічних процесів, моделями водного і гідрохімічного режимів, виконайте числові розрахунки концентрації речовини-забруднювача водного об'єкту.

Приклад 1

Визначити динаміку концентрації солей $c_0(t)$ в басейні стічних вод об'ємом $W_0=Q_0$ (м³), до якого надходять стоки з витратою q_1 (м³/добу) і концентрацією в них солей c_1 (г/м³), якщо початкова концентрація солей в басейні була c_0 (г/м³), а рівень води в ньому не змінюється (швидкість надходження в басейн рівна швидкості витікання стоків із басейну).

Знайти числові значення концентрацій у кількох моментах часу t для різних коефіцієнтів змішування k ($k = 10$ і $k=0,1$) і для трьох різних значень періодів τ_0 повного оновлення (заміщення) басейну стічними водами (для $\tau_0=2,5$ доби, $\tau_0=5$ діб, $\tau_0=10$ діб).

2. Завантажте табличний процесор Microsoft Excel для розв'язання задачі моделювання гідрохімічного режиму при забрудненні/очищенні води у водному басейні.
3. Надайте аркушу *Лист 1* назву *Розрахунки концентрації_1*, де буде досліджуватися динаміка концентрацій забруднення при коефіцієнті змішування більшому за 1 ($k = 10$).
4. На аркушу *Розрахунки концентрації_1* в окремі чарунки Excel введіть вихідні дані до *прикладу 1* та створіть за зразком таблицю для розрахунків гідрохімічного режиму при ЗАБРУДНЕННІ води в басейні.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Розрахунки концентрації речовини-забруднювача																
2																	
3	Коефіцієнт змішування $k=c_1/c_0=$	$c^*_0=$	10														
4		$\tau_0=$	2,5	діб													
5	Час повного оновлення води в басейні	$\tau_0=$	5	діб													
6		$\tau_0=$	10	діб													
7																	
8	Розрахунки гідрохімічного режиму при ЗАБРУДНЕННІ води в басейні																
9	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	$k=10, \tau_0=2,5$																
11	$k=10, \tau_0=5$																
12	$k=10, \tau_0=10$																
13																	

5. У чарунку **B10** уведіть формулу (5.5) для розрахунку концентрації солей $c^*_0(t)$ в басейні для значення $k = 10$, $\tau_0=2,5$ в період часу $t=0$.

$$= \$C\$3 + (1 - \$C\$3) * \text{EXP}(-B\$9/\$C4)$$

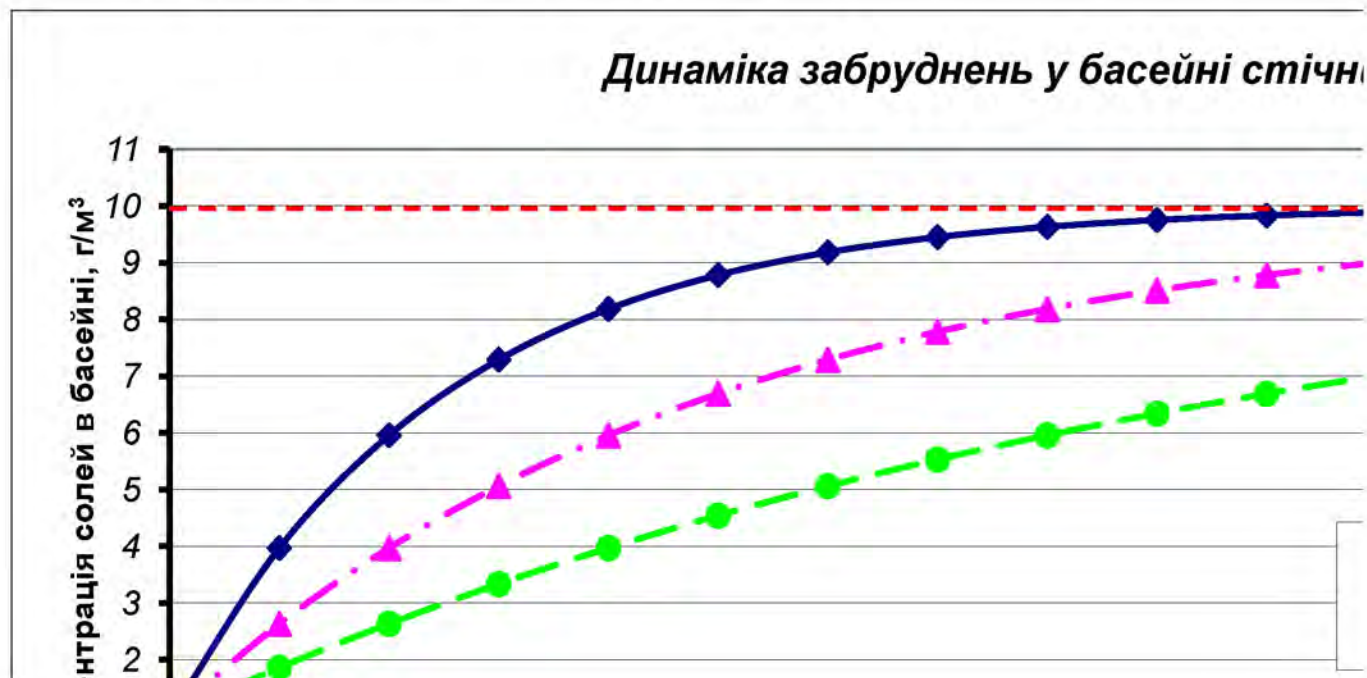
Надалі введену формулу слід буде скопіювати для інших часових значень t , k , τ_0 , тому у формулі необхідно задати абсолютні посилання на певні чарунки (стовпчики, рядки).

6. Розрахуйте концентрації солей $c^*_o(t)$ в басейні для значення:
 $k = 10$, $\tau_0 = 2,5$ в період часу $t = 1 \dots 15$;
 $k = 10$, $\tau_0 = 5$ в період часу $t = 0 \dots 15$;
 $k = 10$, $\tau_0 = 10$ в період часу $t = 0 \dots 15$.

Для цього скопіюйте формулу з чарунки **B10** для діапазону **B11:Q10**, використовуючи маркер авто заповнення, а далі і для діапазону **B11:Q12**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Розрахунки концентрації речовини-забруднювача															
2																	
3	Коефіцієнт змішування $k=c1/c0=$	$C^*_o=$	10														
4		$\tau_0=$	2,5	дів													
5	Час повного оновлення води в басейні	$\tau_0=$	5	дів													
6		$\tau_0=$	10	дів													
7																	
8		Розрахунки гідрохімічного режиму при ЗАБРУДНЕННІ води в басейні															
9	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	$k=10, \tau_0=2,5$	1	3,967	5,956	7,289	8,183	8,782	9,184	9,453	9,633	9,754	9,835	9,89	9,926	9,95	9,967	9,978
11	$k=10, \tau_0=5$	1	2,631	3,967	5,061	5,956	6,689	7,289	7,781	8,183	8,512	8,782	9,003	9,184	9,332	9,453	9,552
12	$k=10, \tau_0=10$	1	1,856	2,631	3,333	3,967	4,541	5,061	5,531	5,956	6,341	6,689	7,004	7,289	7,547	7,781	7,992

7. За результатами обчислення на активному аркуші побудуйте графіки зміни концентрації забруднень у водному басейні з часом (динаміку забруднень стічних вод) для трьох випадків $\tau_0=2,5$, $\tau_0=5$, $\tau_0=10$ та відформатуйте їх за наведеним зразком.



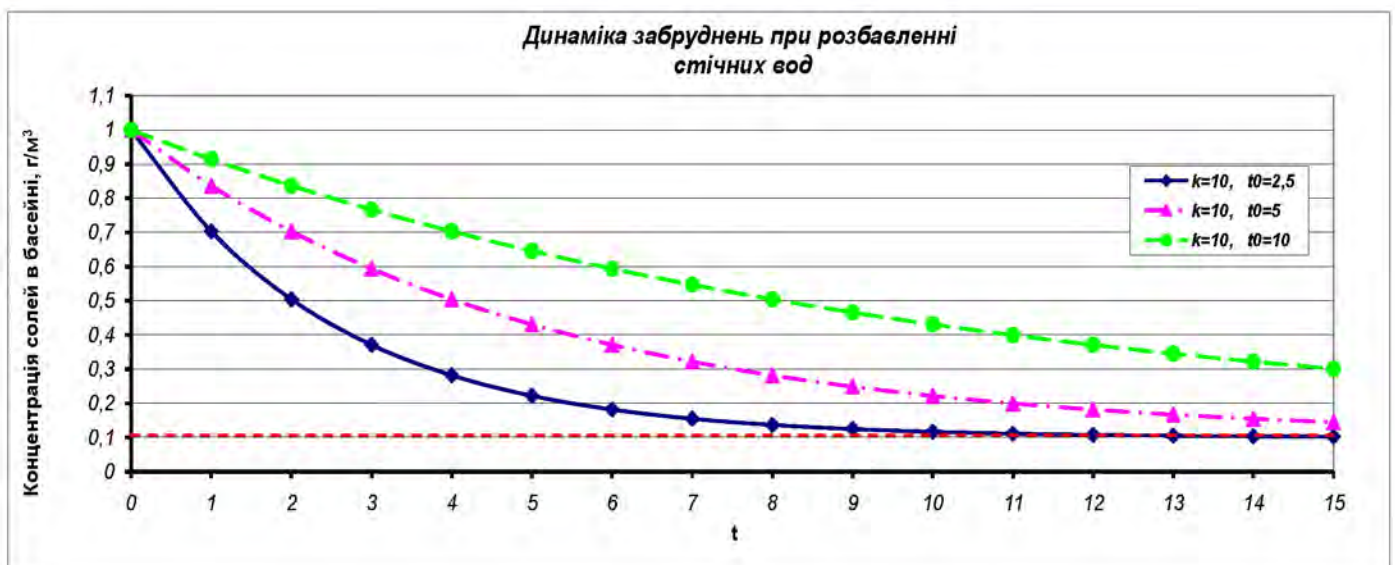
8. Зробіть копію аркуша *Розрахунки концентрації_1*, якій надайте назву *Розрахунки концентрації_2*.

9. На аркуші *Розрахунки концентрації_2* розв'яжіть **приклад 1** для випадку РОЗБАВЛЕННЯ стоків, що містяться у басейні стічних вод, коли параметр $k = c^*_{\theta}$ буде меншим за одиницю $0 < k < 1$.

У чарунку **C3** введіть значення $k=0,1$, змініть назву вихідної таблиці та відредагуйте діаграму.

Проаналізуйте отриманий результат і **запишіть висновок** у будь-яку чарунку Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Розрахунки концентрації речовини-забруднювача															
2																	
3	Коефіцієнт змішування $k=c1/c0=$	$c^*_{\theta}=$	0,1														
4		$\tau_0=$	2,5	дів													
5	Час повного оновлення води в басейні	$\tau_0=$	5	дів													
6		$\tau_0=$	10	дів													
7																	
8		Розрахунки гідрохімічного режиму при ОЧИЩЕННІ води в басейні															
9	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	$k=10, \tau_0=2,5$	1	0,703	0,504	0,371	0,282	0,222	0,182	0,155	0,137	0,125	0,116	0,111	0,107	0,105	0,103	0,102
11	$k=10, \tau_0=5$	1	0,837	0,703	0,594	0,504	0,431	0,371	0,322	0,282	0,249	0,222	0,2	0,182	0,167	0,155	0,145
12	$k=10, \tau_0=10$	1	0,914	0,837	0,767	0,703	0,646	0,594	0,547	0,504	0,466	0,431	0,4	0,371	0,345	0,322	0,301



Отже, при відомих початкових умовах за допомогою графіків легко визначити значення концентрації забруднення в басейні c^*_θ у будь-який момент часу t , а також час, протягом якого концентрація забруднень в басейні досягне заданого значення, наприклад гранично допустимої концентрації (ГДК) $c_{ГДК}$. Після досягнення такої концентрації необхідно подачу стічних вод припинити і відновити її тільки після певного проміжку часу, протягом якого в басейні внаслідок процесів самоочищення концентрація забруднень знизиться до величини c_θ .

10. Збережіть файл із іменем *laboratorna_5.xlsx* у Вашій папці диску D:.

Вправа 2. З'ясування алгоритму математичної моделі динаміки органічної речовини та розчиненого кисню в басейні самоочищення та розв'язання тестового прикладу

1. З метою ознайомлення з математичними моделями динаміки органічної речовини та розчиненого у водному басейні кисню (для проведення імітаційного математичного експерименту з регулювання самоочищення та якості води на площі водозабору) розв'язати тестовий приклад

Приклад 2

Визначити динаміку концентрації органічних речовин $C_{БПК}(t)$ і концентрації розчиненого кисню у воді $C_{РК}(t)$ в басейні самоочищення (в озері, ставку або в водосховищі) при таких вихідних даних:

$$\begin{aligned}C_{БПК}^1 &= 15 \text{ г/м}^3, & C_{БПК}^2 &= 11 \text{ г/м}^3, & C_{БПК}^3 &= 23 \text{ г/м}^3, \\C_{РК}^1 &= 4,3 \text{ г/м}^3, & C_{РК}^2 &= 7,5 \text{ г/м}^3, & C_{РК}^3 &= 3,1 \text{ г/м}^3, \\q_1 &= 30 \text{ м}^3/\text{добу}, & q_2 &= 25 \text{ м}^3/\text{добу}, & q_3 &= 5 \text{ м}^3/\text{добу}, \\ \alpha &= 0,99 \frac{1}{\text{добу}}, & \beta &= 0,50 \frac{1}{\text{добу}}, & C_{РК}^* &= 9,21, & T &= 20^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Як початкові значення БПК і РК в басейні обрати середні зважені концентрації

$$C_{БПК}^{(0)} = \overline{C}_{БПК}$$

$$C_{РК}^{(0)} = \overline{C}_{РК}$$

Параметром управління обрати об'єм басейну W і провести розрахунки для $W_1=300 \text{ м}^3$ та $W_2=600 \text{ м}^3$.

2. У відкритій книзі *laboratorna_5.xlsx* надайте новому аркушу назву *БПК і РК*, де буде досліджуватися динаміка концентрації органічних речовин $C_{БПК}(t)$ і розчиненого кисню $C_{РК}(t)$ в басейні об'ємом $W_1=300 \text{ м}^3$.
3. На аркуші *БПК і РК* в окремі чарунки Excel (наприклад, **A5:D19**) введіть вихідні дані до *прикладу 2* та створіть за зразком таблицю для обчислення постійних величин (діапазон **H5:I19**) і таблицю для розрахунків концентрації *БПК і РК* (діапазон **A22: L24**).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Розрахунки концентрації БПК та РК											
2												
3	Вихідні дані:											
4												
5	Концентрації біологічної потреби кисню	$C^1_{БПК} =$	15	г/м ³							$W =$	300
6		$C^2_{БПК} =$	11	г/м ³							$Q =$	
7		$C^3_{БПК} =$	23	г/м ³							$q =$	
8	Концентрації розчиненого кисню	$C^1_{РК} =$	4,3	г/м ³							$C^-_{БПК} =$	
9		$C^2_{РК} =$	7,5	г/м ³							$R =$	
10		$C^3_{РК} =$	3,1	г/м ³							$C^-_{РК} =$	
11	Витрати (потік) води	$q_1 =$	30	м ³ /добу							$r =$	
12		$q_2 =$	25	м ³ /добу							$r_a =$	
13		$q_3 =$	5	м ³ /добу							$r_p =$	
14		$\alpha =$	0,99	1/добу							$C^-_{БПК} =$	
15		$\beta =$	0,5	1/добу							$\Delta C^{(0)}_{БПК} =$	
16		$C^*_{РК} =$	9,21	г/м ³							$\delta =$	
17		$T =$	20	°C							$C^-_{РК} =$	
18	Початкові значення в басейні (середні зважені концентрації)	$C^{(0)}_{БПК} =$	14	г/м ³							$C^{CT}_{РК} =$	
19		$C^{(0)}_{РК} =$	5,53	г/м ³							$\Delta C^{(0)}_{РК} =$	
20											$\gamma =$	
21	Розрахунки концентрації БПК і РК											
22	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	$C_{БПК}(t)$											
24	$C_{РК}(t)$											
25												

4. У чарунки **I5:I19** уведіть формули (5.11) для розрахунку постійних величин.

Наприклад, для розрахунку Q у чарунку **I5** слід увести формулу

$$=СУММПРОИЗВ(C5:C7;C11:C13)$$

Наприклад, для розрахунку q у чарунку **I6** слід увести формулу

$$=СУММ(C11:C13)$$

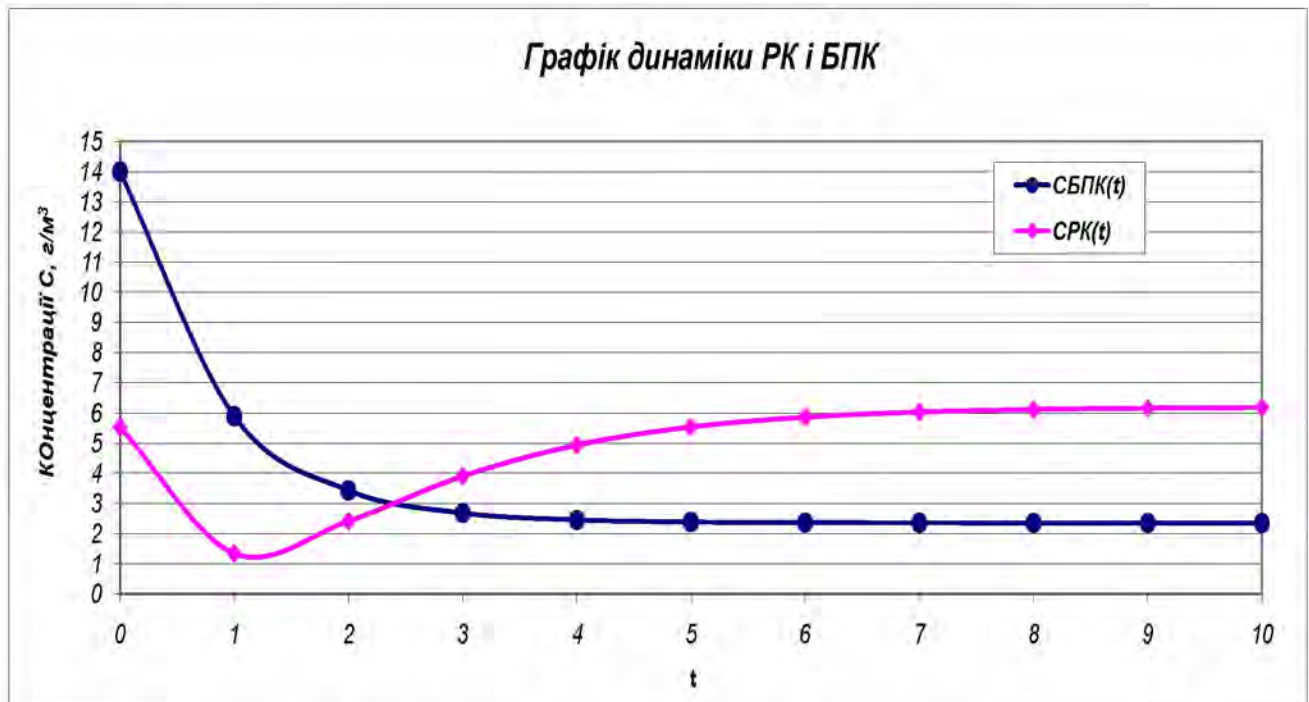
З обчислених постійних величин важливою характеристикою процесу самоочищення є концентрації $\overline{C}^{\alpha}_{БПК}$ і $C^{CT}_{РК}$, які встановлюються за настання рівноваги. Саме до таких рівноважних значень прямують процеси взаємодії РК та БПК на ці величини орієнтуються при попередньому кількісному оцінюванні процесів самоочищення та насичення поверхневих вод киснем.

5. У чарунку **B23** уведіть формулу (5.12) для розрахунку концентрації органічних речовин $C_{БПК}(t)$.

$$= \$I\$13 + \$I\$14 * EXP(-B22 / \$I\$11)$$

6. Скопіюйте формулу із чарунки **B23** в діапазон **C23:L23** для обчислення концентрацій $C_{БПК}(t)$ в інші моменти часу.

7. У чарунку **B24** уведіть формулу (5.13) для розрахунку концентрації розчиненого кисню $C_{PK}(t)$.
8. Скопіюйте формулу із чарунки **B24** в діапазон **C24:L24** для обчислення концентрацій $C_{PK}(t)$ в інші моменти часу.
9. За розрахованими даними побудуйте графіки динаміки БПК і РК та проаналізуйте результат. **Запишіть висновок** у будь-яку чарунку Excel



Отже, за перші 2,3 доби концентрація РК в басейні різко знижується, при цьому також знижується концентрація БПК. До третьої доби концентрації врівноважуються, а потім концентрація РК перевищує концентрацію БПК. Уже на шосту добу концентрації БПК і РК урівноважуються, тобто процес стабілізується (стаціонарний процес).

10. Збережіть файл із іменем *laboratorna_5.xlsx* у Вашій папці диску D: і завершіть роботу з табличним процесором.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату A4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи, відповіді на контрольні запитання та роздрукований на принтері результуючий документ *laboratorna_5.xlsx*, що отриманий після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Назвіть фактори впливу на стан водних об'єктів
2. Чи враховується фактор часу при моделюванні зміни концентрації забруднюючих речовин у водних басейнах?
3. Наведіть визначення динамічних моделей.
4. Який математичний апарат використовується для розв'язання задач, що враховують фактор часу?
5. За якою формулою обчислюється концентрація солей в басейні, якщо рівень води в ньому не змінюється.
6. Яка система рівнянь лежить в основі моделі Фелпса-Стрітера дослідження кисневого режиму і динаміки органічної речовини?
7. Наведіть алгоритм (вказіть послідовність) використання математичної моделі динаміки органічної речовини і розчиненого кисню.
8. Прокоментуйте графіки динаміки БПК і РК.

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцесов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в экологии: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
6. Ляшенко І. М. Основы математического моделирования экономических, экологических та социальных процессов. [Навч.посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
7. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 6. ОСНОВНІ ЗАСАДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЗАБРУДНЕННЯ АТМОСФЕРИ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

Тема: Математичне моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86 та в Excel

Мета: Ознайомитися з основними підходами до моделювання забруднення атмосфери, вміти розрахувати величину забруднення на поверхні землі, обумовленого викидами із точкових джерел забруднення

Завдання:

1. Дослідити розсіювання забруднювачів в атмосфері за Гаусовою моделлю розсіювання. Розрахувати приземну концентрацію забруднення від викидів із точкового джерела.
2. Моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер із встановленим пакетом прикладних програм Office, зокрема – табличним процесором Microsoft Excel

Короткий теоретичний коментар

Найбільш часто різного роду забруднювачі надходять у наземні екосистеми внаслідок їх випадання із атмосфери. Розрізняють випадання глобальні, тобто випадання забруднювачів на значних територіях та локальні. При локальних випаданнях забруднювачі випадають на території прилеглий до джерела викиду забруднення. Тут слід розрізняти джерела точкові та розподілені.

Всі забруднювачі атмосфери, які викидаються точковими та розподіленими джерелами, переносяться, розсіюються і концентруються в атмосфері при різноманітних метеорологічних та топографічних умовах. Атмосферний цикл розсіювання забруднювачів починається із викидів забруднювачів в атмосферу, після чого відбувається їх перенесення та змішування з атмосферою. Цикл завершується, коли забруднювачі осідають на рослинність, ґрунт, поверхню води, або переносяться у космічний простір.

Динаміка та густина локальних випадань нерівномірні і залежать від виду, висоти викиду, пір року, погоди, напрямку вітру, геологічних характеристик місцевості і т. ін. При локальних випаданнях суттєву роль відіграють характеристики джерела викиду. Тобто, розсіювання в атмосфері викидів залежить від багатьох факторів: фізичних та хімічних властивостей речовини викидів, метеорологічних умов в оточуючій атмосфері, розміщення джерела викиду відносно перепон руху повітря та характеру місцевості в напрямку вітру. Викиди можуть складатися із газу та частинок. Якщо частинки мають розмір 20 мкм і менше, то їх швидкість осідання настільки мала, що вони рухаються як газові молекули. Тому аналітичні підходи, що використовуються при розгляді розсіювання газів, можуть бути використані також і для оцінки розсіювання малих частинок. Частинки великих розмірів не можуть бути описані подібним чином, оскільки вони мають значну швидкість осідання, що приводить до підвищених концентрацій таких частинок поблизу джерела викиду порівняно з концентраціями газу, що одночасно викидається.

Тож, якщо розміри частинок викидів із труб та вентиляційних пристроїв не більше 20 мкм, то швидкість їх осідання невелика і вони рухаються подібно молекулам газу. Для забезпечення максимального розсіювання, продукти викиду повинні залишати трубу, маючи достатню підйомну силу, щоб підніматися вгору від горловини труби. За відсутності вітру струмені з малою густиною піднімаються до великих висот, так що приземні концентрації невеликі. Великі зважені частинки та густі газові струмені опускаються до рівня землі поблизу труби. Щоб відвернути відхилення струменя вниз поблизу горловини труби, швидкість газу (V_s), що викидається, повинна бути достатньо великою. Можна використати наступне наближене співвідношення: $V_s/u > 2$. Тобто, спадаючий рух від горловини труби буде мінімальним, коли швидкість викиду газу буде вдвічі перевищувати швидкість вітру на рівні горловини труби.

Для окремих точкових джерел, згідно теорії масопередачі, **концентрація частинок газу $C(x,y,z)$ в будь-який момент часу описується рівнянням**, в допущенні, що швидкість вітру має напрямок осі x :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Cu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(D_x C)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(D_y C)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(D_z C)}{\partial z}\right) \quad (6.1)$$

Для розглядуваного класу задач нас цікавить поведінка газу на великих проміжках часу, коли встановлюється квазістаціонарний стан, тобто

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

Зробимо деякі спрощуючі припущення, а саме:

- перенос маси, пов'язаний з перемішуванням маси вздовж осі x значно перевершує вклад масової дифузії в цьому напрямку
- швидкість вітру постійна, а компоненти тензора дифузії постійні, тобто не залежать від концентрації.

При цих спрощеннях рівняння приймає вигляд

$$u \frac{\partial C}{\partial t} = D_y \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + D_z \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (6.2)$$

Загальний вигляд розв'язку цього рівняння:

$$C = K \frac{1}{x} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{y^2}{D_y} \right) + \left(\frac{z^2}{D_z} \right) \right] \frac{u}{4x} \right\} \quad (6.3)$$

В цьому виразі K – константа, значення якої визначається умовами конкретної задачі. Одна із таких умов полягає в тому, що маса забруднювача, що проходить через будь-яку вертикальну площину у напрямку вітру від джерела повинна бути постійною і дорівнювати потужності Q джерела викиду

$$Q = \iint u C dy dz$$

Фактично, ця умова означає відсутність яких-небудь реакцій, у тому числі явищ сорбції та десорбції, які можуть видаляти забруднювачі із загального масового потоку. Інтегрування по y проводиться в границях від мінус до плюс безкінечності (відхилення по перпендикуляру від центральної лінії), границі інтегрування по z визначаються конкретною задачею.

Розрахунок максимальних концентрацій забруднюючих речовин викидів стаціонарних джерел

Особливості розповсюдження домішок в атмосфері залежать від параметрів викидів і метеорологічних умов. Так, концентрація забруднюючих речовин в повітрі навколо підприємств, що являються джерелами викидів, залежить від впливу таких факторів:

- висота труби (H), з якої здійснюється викид забруднюючих речовин – чим вища труба, тим краще забруднювачі розсіюються в повітрі;
- діаметр труби (D) – із збільшенням діаметра труби збільшується кількість забруднюючих речовин, що надходять в атмосферу;
- кількість труб для здійснення викидів на одному підприємстві;
- швидкість викиду газоповітряної суміші;
- температура газоповітряної суміші, що викидається;
- температура навколишнього середовища;
- постійність або періодичність здійснення викидів в атмосферу;
- швидкість та напрям вітру – при високій турбулентності повітря краще перемішується і забруднюючі речовини розсіюються;
- метеорологічні умови;
- особливості рельєфу;
- наявність або відсутність забудови території, на якій знаходиться джерело забруднення;
- відстань від джерела забруднення.

Враховуючи всі ці фактори розроблені певні математичні моделі для розрахунку забруднення атмосферного повітря.

Деякі з них виключають або приймають за сталі значення певних факторів, тим самим спрощуючи модель, але ці спрощення можуть бути дійсними лише для певних заданих умов і моменту часу. Фактори, від яких залежить шукана величина і є обмежуючими факторами.

Чисельна оцінка і прогнозування концентрації шкідливої домішки можна проводити на основі інтегрування рівняння турбулентної дифузії (М. Берлянд):

$$u \frac{\partial C}{\partial x} - \omega_a \frac{\partial C}{\partial z} = k_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial C}{\partial z} - \varepsilon_a, \quad (6.4)$$

де C – концентрація домішки у приземному шарі повітря;

u – швидкість вітру;

ω_a – швидкість осідання домішки;

k_z, k_y – вертикальна та горизонтальна складові коефіцієнта турбулентного обміну

ε_a – приток та стік домішки за рахунок внутрішніх причин.

Інтегрування дає змогу отримати максимальну концентрацію C_m , яка утворюється при нормативних метеоумовах. Ці висновки увійшли до нормативного документа ОНД-86, в якому наведені формули для розрахунків максимальних концентрацій у приземному 2-метровому шарі повітря у період нормативних метеоумов та формули обчислення відстаней, на яких відбуваються ці концентрації.

Математичне моделювання та прогнозування стану атмосферного повітря за вмістом забруднюючих речовин у відповідності до методики ОНД 86 є досить простим. Воно дає змогу проводити обчислення як «вручну», так і за допомогою пакетів прикладних програм, що автоматизують розрахунок. Розрахунок можна проводити в програмному середовищі Mathcad, яке дозволяє автоматизовано проводити обчислення та виводити графіки залежностей концентрації забруднюючих речовин в повітрі від відстані до джерела здійснення викиду.

Ступінь небезпеки забруднення атмосферного повітря характеризується найбільш розрахованим значенням концентрації, що відповідає несприятливим метеорологічним умовам, в тому числі небезпечності швидкості вітру. Норми не розповсюджуються на розрахунок концентрацій на дальніх (більше 100 км) відстанях від джерела викиду.

Для джерел в розрахункових формулах довжина (висота) виражена в метрах (м), час – у секундах (с), маса забруднюючих речовин – в грамах (г), їх концентрація в атмосферному повітрі – в міліграмах на кубічний метр (мг/м^3), концентрація на виході з джерела – грамах на кубічний метр (г/м^3).

Розрахунок концентрації забруднюючих речовин, що повністю або частково хімічно трансформуються в більш небезпечні речовини, проводиться по кожній вихідній і утвореній речовині окремо. При цьому потужність джерела для кожної речовини встановлюється з розрахунком максимально можливої трансформації вихідної речовини в більш токсичні. Розрахунками визначаються разові концентрації.

Порядок і методика виконання завдань

1. Дослідити розсіювання забруднювачів в атмосфері за Гаусовою моделлю розсіювання. Розрахувати приземну концентрацію забруднення від викидів із точкового джерела.

Для ефективного математичного моделювання забруднення атмосфери слід врахувати, що розсіювання в атмосфері викидів із труб та вентиляційних пристроїв залежить від багатьох факторів: фізичних та хімічних властивостей речовини, що викидається, метеорологічних умов в оточуючій атмосфері, розміщення труби відносно перепон руху повітря та характеру місцевості у напрямку вітру.

Точкове джерело на рівні землі

У випадку точкового наземного джерела інтегрування по z проводиться в границях від 0 до безкінечності і отримуємо

$$K = \frac{Q}{2\pi (D_x D_y)^{1/2}} \quad (6.5)$$

Отже для концентрації забруднення в напрямку вітру від точкового наземного джерела отримуємо:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right], \quad (6.6)$$

де введено позначення

$$\sigma_y^2 = \frac{2 D_y y}{u}, \quad \sigma_z^2 = \frac{2 D_z z}{u} \quad (6.7)$$

Якщо прийняти y та z рівними нулю, то отримаємо, очевидно значення приземної концентрації на осі x , тобто на центральній лінії від точкового наземного джерела:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \quad (6.6a)$$

Точкове джерело на висоті

У випадку точкового джерела розміщеного на висоті H над земною поверхнею, можна інтегрування по z провести в границях мінус - плюс безкінечність, так, що отримуємо

$$K = \frac{Q}{4\pi (D_x D_y)^{1/2}} \quad (6.8)$$

Для викиду із труби з ефективною висотою H експоненціальний член у виразі (6.6) слід змінити шляхом заміни $z \rightarrow z-H$.

З урахуванням ефекту віддзеркалення, **вираз для концентрації забруднення у викиді при піднятого джерела** можна отримати наступний вираз:

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right] + \exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\} \quad (6.9)$$

Це, так звана, **гаусова модель переносу**.

На земній поверхні ($z=0$) маємо

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(H)^2}{2\sigma_z^2}\right] \right\} \quad (6.9a)$$

Якщо необхідно оцінити значення концентрації на центральній лінії, то в (6.9a) слід покласти $y=0$.

Для практичного використання приведених формул слід врахувати, що, окрім фізичних даних таких як координати x, y, z , потужність джерела Q та ефективна висота H , потрібно знати величини, що характеризують швидкість вітру u , а також σ_y та σ_z . Величина швидкості вітру є функцією висоти z . Типовою залежністю $u(z)$ є вираз

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^p \quad (6.10)$$

де u_1 – швидкість вітру на висоті z_1 . Практично за величину u_1 приймають значення швидкості вітру виміряне на висоті $z_1=10$ м.

Профіль швидкості вітру, а отже і показник p , залежить від характеристик атмосфери. Зокрема:

- для міської забудови можна взяти $p=0.40$,
- для районів густого лісу, міст та приміських зон $p=0.28$,
- для плоскої відкритої сільської місцевості, озер та морів приймають $p=0.16$.

Значення σ_y та σ_z ів'язані з коефіцієнтами дифузії в напрямку осей y та z . Ці величини є функціями положення точки спостереження в напрямку вітру від джерела, а також функціями умов стійкості атмосфери. Для оцінки цих величин проведено досить багато експериментальних досліджень, в результаті яких отримані діаграми.

Лінійні джерела

У ряді випадків, коли ряд промислових підприємств, розташованих вздовж річки, порту, або пряма автомагістраль з інтенсивним рухом автотранспорту, забруднення може моделюватися неперервним безкінечним лінійним джерелом. Коли швидкість вітру перпендикулярна до такого джерела, концентрація забруднювача у напрямку вітру від джерела може бути записана у вигляді:

$$C(x, y, 0) = \frac{2 \cdot q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z u} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.11)$$

де q – потужність джерела на одиницю довжини (наприклад вона може бути виражена в г/с м). У цей вираз не входить стандартне відхилення у горизонтальному напрямку σ_y , оскільки розсіювання газів поперек напрямку вітру від різних ділянок лінійного джерела випромінювання взаємно компенсується. Відмітимо також, що у цей вираз не входить y , оскільки при заданому x концентрації для всіх y однакові.

Якщо неперервне лінійне джерело має обмежену довжину, ми повинні враховувати крайові ефекти. Останні мають суттєве значення, оскільки при віддаленні від джерела у напрямку вітру область впливу джерела буде розширюватися. Якщо лінійне джерело перпендикулярне напрямку вітру, зручно розташувати вісь x у напрямку вітру так, щоб вона проходила через точку спостереження. Тоді кінці лінійного джерела будуть розташовуватися на осі y , перпендикулярно напрямку вітру і мати координати y_1 і y_2 , причому $y_1 < y_2$. Тоді концентрація вздовж осі x на рівні землі буде визначатися виразом:

$$C(x, 0, 0) = \frac{2 \cdot q}{\sqrt{2\pi} \sigma_z u} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H}{\sigma_z} \right)^2 \right] \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5 p^2) dp \quad (6.12)$$

2. *Моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86.*

Для оцінки і прогнозу забруднення атмосфери стаціонарними джерелами, використовується методика ОНД-86. Вона дає змогу створити математичну модель для оцінки і регуляції якості навколишнього середовища. З допомогою використання такої моделі розраховується максимальне значення приземної концентрації шкідливої речовини та сумарна концентрація шкідливих речовин.

Вихідними параметрами для моделювання процесів розсіювання забруднюючих речовин в атмосферному повітрі є: висота труби (H), діаметр труби (D), швидкість виходу пило-газової суміші з труби (V), температура пило-газової суміші T_g , маса забруднюючої речовини, що викидається в атмосферу (M)

Максимальне значення приземної концентрації $ЗР C_m$ (мг/м³) при викиді газоповітряної суміші з одиничного точкового джерела з круглим устям, що досягається при несприятливих метеорологічних умовах на відстані x_m від джерела, згідно ОНД-86 розраховується за формулою:

$$C_m = \frac{(A \cdot M \cdot F \cdot m \cdot n \cdot \eta)}{H^2 \cdot \sqrt[3]{V \cdot \Delta T}} \quad (6.13)$$

де A – коефіцієнт, що залежить від температурної стратифікації атмосфери, для території країни $A=200$;

F – безрозмірний коефіцієнт, що враховує швидкість осідання ЗР в атмосферному повітрі, $F=1$ для газів та мілкодисперсних аерозолів;

m, n – коефіцієнти, що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду;

η – безрозмірний коефіцієнт, що враховує вплив рельєфу місцевості. Для всієї Полтавської області, де перепади висот не перевищують 50 м на 1 км, $\eta=1$;

ΔT (°C) – різниця між температурою газоповітряної суміші та температурою навколишнього середовища.

Формула для розрахунку середньої швидкості виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду (м/с):

$$\omega_0 = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot D^2}, \quad (6.14)$$

де $V, \text{м}^3/\text{с}$ – витрата газоповітряної суміші;

$D, \text{м}$ – діаметр устя джерела викиду.

Для визначення коефіцієнтів m і n слід розрахувати f, V_m, V_{ml} :

$$f = 1000 \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot D}{H^2 \cdot \Delta T} \quad (6.15)$$

$$V_m = 0.65 \cdot \sqrt[3]{\frac{V \Delta T}{H}} \text{ — для гарячих часток} \quad (6.16)$$

$$V_{ml} = 1.3 \cdot \frac{\omega_0 \cdot D}{H} \quad (6.17)$$

$$f_e = 800 \cdot V_{ml}^3 \text{ — для холодних часток} \quad (6.18)$$

Коефіцієнт m визначається за формулою:

$$m = \begin{cases} \frac{1}{0.67 + 0.1 \cdot \sqrt{f} + 0.34 \cdot \sqrt[3]{f}}, & \text{якщо } f < 100 \\ \frac{1.47}{\sqrt[3]{f}}, & \text{якщо } f \geq 100 \end{cases} \quad (6.19)$$

Коефіцієнт n у випадку $f \leq 100$ визначається за формулою:

$$n = \begin{cases} 1 & \text{якщо } V_m \geq 2 \\ 0.532 \cdot V_m^2 - 2.13 \cdot V_m + 3.13 & \text{якщо } 0.5 \leq V_m < 2 \\ 4.4 \cdot V_m & \text{якщо } V_m < 0.5 \end{cases} \quad (6.20)$$

*Розрахунок відстані до джерела викиду, при якому
приземна концентрація досягає максимального значення*

Для розрахунку відстані до джерела викиду, при якому спостерігається максимальна приземна концентрація при несприятливих метеорологічних умовах, використовується формула:

$$x = d \cdot H \cdot \frac{5 - F}{4}, \quad (6.21)$$

де H , м – висота джерела викиду над рівнем землі;

F – безрозмірний коефіцієнт, що враховує швидкість осідання ЗР в атмосферному повітрі, $F=1$ для газів та мілкодисперсних аерозолів;

d – безрозмірний коефіцієнт, що при $f < 100$, визначається за формулою:

$$d = \begin{cases} 2.48 \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & \text{якщо } V_m < 0.5 \\ 4.95 \cdot V_m \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & \text{якщо } 0.5 \leq V_m < 2 \\ 7 \cdot \sqrt{V_m} \cdot (1 + 0.28 \cdot \sqrt[3]{f}) & \text{якщо } V_m \geq 2 \end{cases} \quad (6.25)$$

*Розрахунок приземних концентрацій забруднюючих
речовин викидів групи джерел та побудова карти*

Розрахунок концентрації забруднюючих речовин в атмосфері без врахування впливу забудови можна здійснюється за допомогою програми ОНД-86 для точкових джерел, або ж з використанням математичних редакторів або табличного процесора, увівши всі необхідні формули.

На основі моделювання можна зробити висновок, що досліджувана екосистема (атмосферне повітря) знаходиться нормальному / критичному стані. Викиди від підприємств та їхні сумарні викиди перевищують / не перевищують допустимі норми, концентрації забруднюючих речовин, що встановилися в приземних шарах повітря перевищують / не перевищують гранично-допустимих концентрацій (ГДК), встановлених для даних речовин.

3. Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл *laboratorna_6.xlsx*.

**Завдання для практичного виконання,
порядок і рекомендації щодо їх виконання**

Вправа 1. Дослідити розсіювання забруднювачів в атмосфері за Гаусовою моделлю розсіювання. Розрахувати приземну концентрацію забруднення від викидів із точкового джерела

1. Ознайомтеся з задачею стосовно розсіювання забруднювачів в атмосфері. Розрахуйте приземну концентрацію забруднення від викидів із точкового джерела.

Приклад 1

Двоокис сірки викидається у кількості 160 г/с із труби ефективною висотою 60 м. Швидкість вітру на рівні горловини труби рівна 6 м/с, а атмосферна стійкість відповідає класу D для хмарного дня.

Визначити приземні концентрацію на центральній лінії на віддалі 500 м від труби в мікрограмах на кубічний метр.

Для віддалі 500 м значення σ_y та σ_z відповідно рівні 36 і 18,5 м.

- Завантажте табличний процесор Microsoft Excel для розв'язання задачі *Приклад 1* по обчисленню приземної концентрації забруднення.
- Надайте аркушу *Лист 1* назву *Приклад_1*.
- На аркуші *Приклад_1* в окремі чарунки діапазону **A2:K8** введіть вихідні дані до *прикладу 1* та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Моделювання забруднення атмосфери										
2	Вихідні дані:										
3	Щільність	Q=	160	г/с							
4	Швидкість вітру, м/с	u=	6	м/с							
5	Висота труби	H=	60	м							
6	Віддалі від джерела	y=	0	м							
7	викиду	z=	0	м							
8		x=	500	м	$\sigma_y =$	36	м	$\sigma_z =$	18,5	м	
9											
10	Розрахунки:										
11	Концентрація ЗР, г/м³	C=	6,626E-05	г/м ³							
12	Концентрація, мкг/м³	C=	66,26	мкг/м ³							
13											
14											

5. У чарунку **C11** введіть формулу гаусової моделі переносу забруднюючих речовин (6.9) для обчислення приземної концентрації на заданій віддалі по центральній лінії від труби в грамах на кубічний метр.

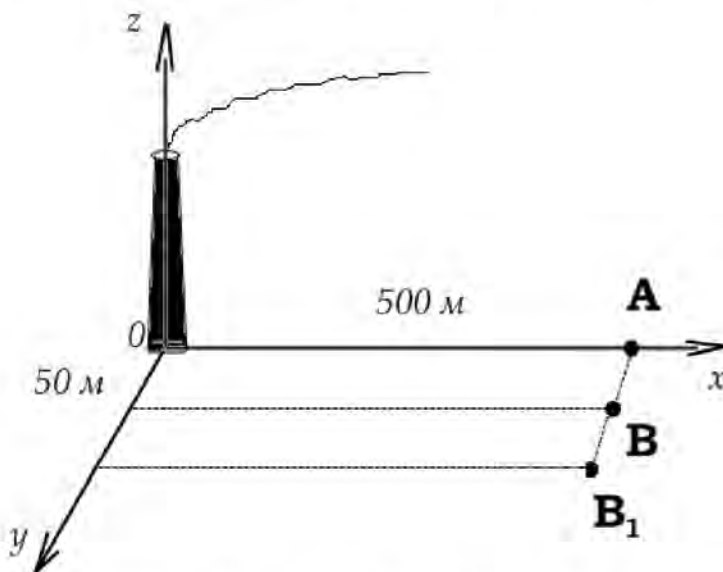
$$=C3/(2*ПИ()*C4*F8*J8)*EXP(-(1/2)*C6^2/F8^2)*(EXP(-(1/2)*(C7-C5)^2/J8^2)+EXP(-(1/2)*(C7+C5)^2/J8^2))$$

6. У чарунку **C12** введіть формулу для обчислення приземної концентрації на заданій віддалі по центральній лінії від труби в мікрограмах на кубічний метр, виконуючи посилання на чарунку **C11**. Проаналізуйте результат.
7. Зробіть копію аркушу *Приклад_1*, якій надайте назву *Приклад_2*
8. На аркуші *Приклад_2* розв'яжіть однойменну задачу, змінивши лише окремі вхідні дані:

Приклад 2

Для умов попереднього прикладу 1 визначити приземну концентрацію у точці **В**, віддаленій на 50 м у напрямку, перпендикулярному центральній лінії і що виходить з точки на цій лінії, віддаленій від труби на 500 м.

9. Проаналізуйте отриманий результат:

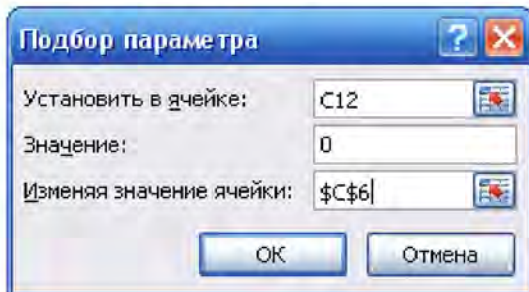
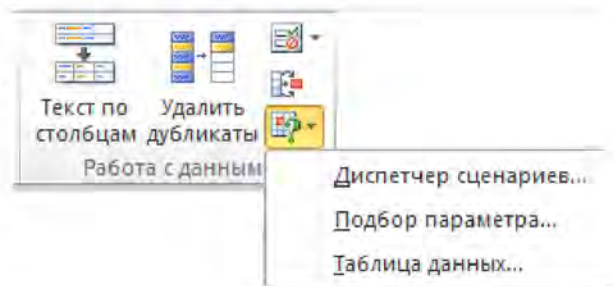


При відхиленні від центральної лінії на 50 м, що становить всього 10 % віддалі від труби

$y/x = 50 \text{ м} / 500 \text{ м} = 0,1 = 10 \%$,
приземна концентрація зменшиться майже на 62%
 $(66,26 - 25,26) / 66,26 \approx 0.62 = 62\%$

10. На аркуші *Приклад_2* обчисліть значення приземної концентрації у точці **В1**, віддалі якої від центральної лінії 100 м (у чарунку **C6** уведіть значення 100). Оцініть, *як буде змінюватися концентрація при віддаленні від центральної лінії*. Запишіть цей висновок у будь-яку вільну чарунку аркушу *Приклад_2*.
11. Спробуйте визначити, чи може бути приземна концентрація рівна нулю і на якій віддалі у від точки А (розташована на центральній лінії за 500 м від труби). Для цього скористайтеся засобом Подбор параметра Excel:

- встановіть курсор у чарунку C12;
- виконайте команду **Работа с данными** ⇒ **Подбор параметра** стрічки **Данные**;
- у вікні **Подбор параметра** встановіть необхідні опції



12. Збережіть результати роботи у Вашій папці диску *D:* з іменем *laboratorna_6.xlsx*.

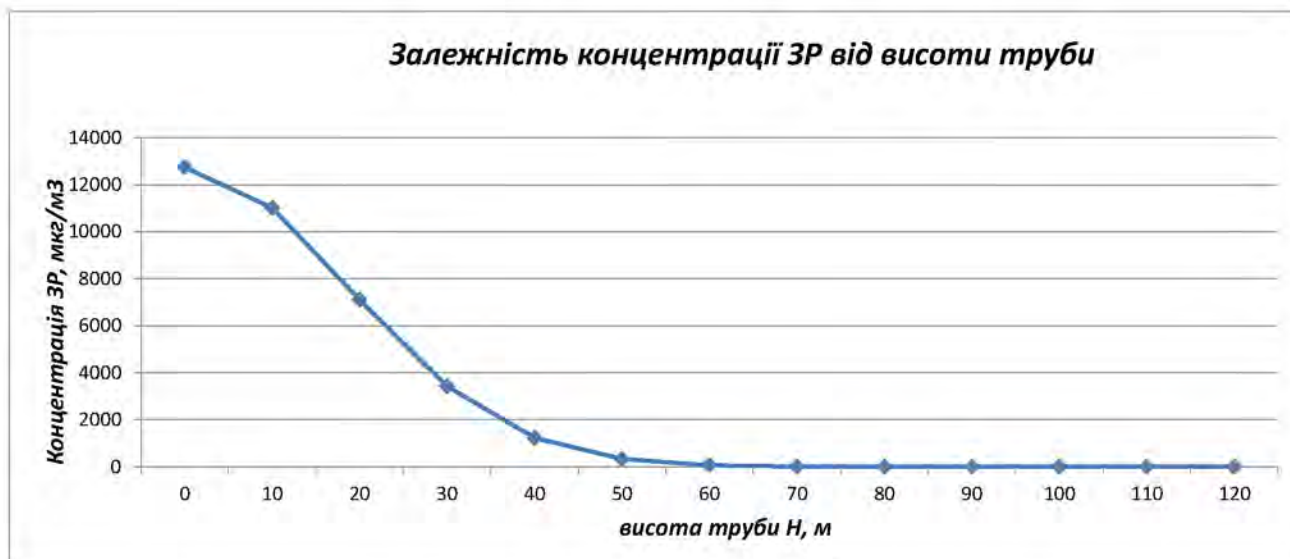
13. З'ясуйте, **чи залежить приземна концентрація** забруднювача у певній точці на заданій віддалі від джерела викиду (наприклад, у точці А) **від висоти труби**.

Для цього:

- зробіть копію аркушу *Приклад_1*, якій надайте назву *Приклад_1_висота*;
- на аркуші *Приклад_1_висота* уведіть різні значення висоти труби у чарунки **C5:O6**, використовуючи Автозаповнення;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	Модельовання забруднення атмосфери (змiна висоти труби)														
1															
2	Вихiднi данi:														
3	Щiльнiсть	Q=	160	г/с											
4	Швидкiсть вiтру, м/с	u=	6	м/с											
5	Висота труби	H=	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
6	Вiддалi вiд джерела	y=	0	м											
7	викиду	z=	0	м											
8		x=	500	м	$\sigma_y=$		36	м	$\sigma_z=$		18,5	м			
9															
10	Розрахунки:														
11	Концентрацiя ЗР, г/м ³	C=	0,013	0,011	0,007	0,003	0,001	3E-04	7E-05	1E-05	1E-06	9E-08	6E-09	3E-10	9E-12
12	Концентрацiя, мкг/м ³	C=	12745	11013	7105	3422	1231	330,5	66,26	9,918	1,109	0,092	0,006	3E-04	9E-06

- у чарунцi **C11** змiнiть формулу для розрахунку концентрацiї ЗР – задайте у формулi абсолютнi посилання на всi чарунки, окрiм **C5**,
- скопiюйте формулу iз чарунки **C11** у чарунки дiапазону **D11:O11** використовуючи Автозаповнення;
- використовуючи Автозаповнення, скопiюйте формулу iз чарунки **C12** у чарунки дiапазону **D12:O12**;
- побудуйте графiк змiни концентрацiї ЗР у мкг/м³ у залежностi вiд висоти труби



- зробіть висновок чи залежить *приземна концентрація* забруднюючої речовини від висоти труби.

14. Визначте, чи залежить *приземна концентрація забруднювача* у певній точці при фіксованій віддалі від труби (наприклад, у точці А) *від швидкості вітру*.

Для цього:

- зробіть копію аркушу *Приклад_1*, якій надайте назву *Приклад_1_вітер*;
- на аркуші *Приклад_1_вітер* уведіть різні значення швидкості вітру у чарунки **C4:V4**, використовуючи Автозаповнення;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
	Моделювання забруднення атмосфери (змiна швидкостi вiтру)																					
1																						
2	Вихiднi данi:																					
3	Щiльнiсть	Q=	160 г/с																			
4	Швидкiсть, м/с	u=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5		H=	60	м																		
6	Вiддалi вiд	y=	0	м																		
7		z=	0	м																		
8	джерела викиду	x=	500	м		$\sigma_y =$		36		м		$\sigma_z =$		18,5		м						
9																						
10	Розрахунки:																					
11	Концентрацiя ЗР, г/м³	C=	0,0004	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	Концентрацiя, мкг/м³	C=	397.56	199	133	99.4	79.5	66.3	56.8	49.7	44.2	39.8	36.1	33.1	30.6	28.4	26.5	24.8	23.4	22.1	20.9	19.9

- у чарунцi **C11** змiнiть формулу для розрахунку концентрацiї ЗР – задайте у формулi абсолютнi посилання на всi чарунки, окрiм **C5**,
- скопiюйте формулу iз чарунки **C11** у чарунки дiапазону **D11:V11** використовуючи засiб Автозаповнення;
- використовуючи Автозаповнення, скопiюйте формулу iз чарунки **C12** у чарунки дiапазону **D12: V 12**;
- побудуйте графiк змiни концентрацiї ЗР у мкг/м³ у залежностi вiд швидкостi вiтру



- зробіть висновок чи залежить приземна концентрація забруднюючої речовини від швидкості вітру.
15. У довільній чарунці аркушу *Приклад_1* на основі проведених розрахунків запишіть висновок – від чого залежить приземна концентрація забруднювача атмосфери та опишіть характер залежності (збільшується, зменшується, не змінюється тощо). Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_6.xlsx*.

Вправа 2. Моделювання розсіювання забруднення атмосферного повітря за допомогою методики ОНД-86

1. Для моделювання та чисельного прогнозування концентрації шкідливих домішок за допомогою дифузійної моделі та, відповідно, ознайомлення з методикою моделювання забруднення атмосферного повітря ОНД-86 розв'яжіть *Приклад 3*.

Приклад 3

Для заданих трьох підприємств м. Полтави розрахувати максимальні концентрації забруднюючих речовин від викидів стаціонарних джерел та максимальні відстані, на яких досягаються такі концентрації, за методикою ОНД-86. Вихідні дані до математичної моделі наведені в таблиці 6.1.

При моделюванні розповсюдження шкідливих домішок в приземному шарі атмосфери врахувати, що:

- коефіцієнт стратифікації атмосфери A , що враховує розсіювальну здібність атмосфери при несприятливих умовах вертикального та горизонтального перемішування, може змінюватися від 140 до 250. Для території України $A=200$;
- безрозмірний коефіцієнт η , що враховує вплив рельєфу місцевості на концентрацію домішок, для областей із перепадами висот не більше 50 м на 1 км, $\eta = 1$;

- безрозмірний коефіцієнт F , що враховує швидкість осідання забруднюючої речовини в атмосферному повітрі, для газів та мілкодисперсних аерозолів $F=1$;
- температура повітря $T=25^{\circ}\text{C}$.

Таблиця 6.1

Вихідні дані для моделювання розповсюдження шкідливих домішок

Показник		Підприємство I	Підприємство II	Підприємство III
Висота джерела викиду над рівнем землі (висота труби, з якої здійснюється викид забруднюючих речовин), H, м		15,6	12,1	15,6
Діаметр устя джерела викиду (труби), D, м		0,8	0,6	0,8
Витрата газоповітряної суміші (швидкість викиду пило-газової суміші з труби), V, м³/с		0,6	0,5	0,7
Температура газоповітряної суміші, що викидається, T_g, °C		91,6	129,8	83,4
Маса речовини-забруднювача, що викидаються в атмосферу за одиницю часу, M, г/с	SO_2			0,014
	CO	0,0656	0,101	
	NO_2	0,0494		0,082
	Пил	0,0844	0,049	0,04
	NO			0,101

- У файлі *laboratorna_6.xlsx* додайте новий аркуш, якому надайте назву *Підприємство_I*.
- На аркуші *Підприємство_I* в окремі чарунки діапазону **A5:D22** введіть вихідні дані до *прикладу 3* по підприємству I та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком.
- У чарунки **E18:E22** введіть ГДК забруднюючих речовин у мг/м³.

Речовина	ГДК, мг/м ³
SO_2	0,5
CO	5
NO_2	0,085
Пил	0,5
NO	0,4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Модельовання поширення забруднюючих речовин в атмосфері від викидів стаціонарних джерел за методикою ОНД-86								
1									
2									
3	Визначення максимального значення приземної концентрації C ($\text{мг}/\text{м}^3$) забруднюючої речовини при викиді газоповітряної суміші з одиничного точкового джерела з круглим устям, що досягається при несприятливих метеорологічних умовах на відстані $x_{\text{зм}}$ від джерела								
4									
5	Вихідні параметри для модельовання процесів розсіювання забруднюючих речовин в атмосферному повітрі:								
6						Проміжні розрахунки:			
7	Коефіцієнт, що залежить від температурної стратифікації атмосфери	A=	200	для території України					
8	Безрозмірний коефіцієнт, що враховує швидкість осідання забруднюючої речовини в атмосферному повітрі	F=	1	для газів та мілкодисперсних аерозолів					
9	Безрозмірний коефіцієнт, що враховує вплив рельєфу місцевості	η=	1	перепади висот не перевищують 50 м на 1 км, $\eta = 1$;					
10	Температура навколишнього середовища	T=	25	$^{\circ}\text{C}$					
11	Висота джерела викиду над рівнем землі (висота труби, з якої здійснюється викид забруднюючих речовин)	H=	15,6	м					
12	Діаметр устя джерела викиду (труби)	D=	0,8	м					
13	Витрата газоповітряної суміші (швидкість викиду пило-газової суміші з труби)	V=	0,6	$\text{м}^3/\text{с}$					
14	Температура газоповітряної суміші, що викидається	$T_{\text{г}}$=	91,6	$^{\circ}\text{C}$					
						Різниця між температурою газоповітряної суміші та температурою навколишнього середовища	ΔT=	66,6	$^{\circ}\text{C}$
						Коефіцієнти, що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду	m=	1,1949	
							n=	1,6564	
						Безрозмірний коефіцієнт	d=	4,9112	
						Відстань до джерела викиду, при якому приземна концентрація досягає максимального значення при несприятливих метеорологічних умовах	x=	76,614	м

	A	B	C	D
15				
16	Забруднюючі речовини:			
17				
18		SO₂	г/с	
19	Маса (M) речовини-забруднювача (г),	CO	0,0656	г/с
20	що викидаються в атмосферу	NO₂	0,0494	г/с
21	за одиницю часу (с)	Пил	0,0844	г/с
22		NO		г/с
23		M=	0,1994	
24				
25	Проміжні розрахунки:			
26	Середня швидкість виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду	ω₀ =	1,1937	
27		f =	0,0703	
28		v =	0,8894	м/с
29		v¹ =	0,0796	
30		f_e =	0,4031	
31				

- У чарунці **C23** обчисліть загальну масу забруднювачів, що викидаються в атмосферу за одиницю часу.
- Розрахунок приземної концентрації від викидів забруднюючих речовин проводиться за формулою (6.13)

$$C_m = \frac{(A \cdot M \cdot F \cdot m \cdot n \cdot \eta)}{H^2 \cdot \sqrt{V \cdot \Delta T}}$$

У даній формулі невідомими є значення коефіцієнтів *m* і *n*, що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду. Щоб їх розрахувати, необхідно виконати ряд обчислень:

У чарунках **C26:C30** послідовно виконайте проміжні розрахунки:

- у чарунку **C26** введіть формулу (6.14) для обчислення середньої швидкості виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду (м/с);
- у чарунку **C27** введіть формулу (6.15);
- у чарунку **C28** введіть формулу (6.16);
- у чарунку **C29** введіть формулу (6.17);
- у чарунку **C30** введіть формулу (6.18).

- У чарунках **H7:H11** виконайте розрахунки необхідних показників:

- у чарунку **H7** введіть формулу для обчислення різниці між температурою газоповітряної суміші та температурою навколишнього середовища
 $\Delta T = T_a - \theta$;

- у чарунки **H8, H9** введіть формули (6.19), (6.20) для обчислення коефіцієнтів m і n , що враховують умови виходу газоповітряної суміші з устя джерела викиду;
 - у чарунку **H10** введіть формулу (6.22) для обчислення безрозмірного коефіцієнта d ;
 - у чарунку **H11** введіть формулу (6.21) для обчислення відстані до джерела викиду, при якому приземна концентрація досягає максимального значення при несприятливих метеорологічних умовах.
8. У чарунку **H18** уведіть формулу (6.13) для розрахунку шуканої **максимальної приземної концентрації C_m ($\text{мг}/\text{м}^3$)** при викиді першої газоповітряної суміші з одиничного точкового джерела з круглим устям. При записі формули задайте абсолютні посилання на всі чарунки, крім чарунки **C18** (оскільки за умовою маса **SO₂** рівна 0, то, відповідно значення C_m від цього забруднювача теж буде рівним 0).

	E	F	G	H	I	J
15						
16		Максимальна концентрація забруднюючих речовин:				
17	ГДК, $\text{мг}/\text{м}^3$					C_m, од.ГДК
18	0,5	Максимальне значення приземної концентрації забруднюючої речовини C	$C_{m1} =$	0 $\text{мг}/\text{м}^3$		0,0000
19	5		$C_{m2} =$	0,0312 $\text{мг}/\text{м}^3$		0,0062
20	0,085		$C_{m3} =$	0,0235 $\text{мг}/\text{м}^3$		0,2765
21	0,5		$C_{m4} =$	0,0402 $\text{мг}/\text{м}^3$		0,0803
22	0,4		$C_{m5} =$	0 $\text{мг}/\text{м}^3$		0,0000
23			$C =$	0,0949		
24						

9. Скопіюйте формулу максимальної приземної концентрації від викидів першого забруднювача, на сусідні чарунки для розрахунку максимальної приземної концентрації від викидів інших забруднюючих речовин (із чарунки **H18** скопіюйте формули у чарунки **H19:H23**).
10. У чарунках діапазону **J18:J22** розрахуйте максимальні концентрації забруднюючих речовин в одиницях по відношенню до їх ГДК.
11. Створіть три копії аркуша **Підприємство_I**, яким надайте назви **Підприємство_II**, **Підприємство_III** та **Місто**
12. На аркуші **Підприємство_II** змініть вхідні дані і виконайте розрахунки забруднення, внаслідок роботи підприємства II.
- На аркуші **Підприємство_III** змініть вхідні дані і виконайте розрахунки забруднення, внаслідок роботи підприємства III.

13. Проаналізуйте результат. На будь-якому аркуші підприємства у будь-які чарунки запишіть висновок – за яких умов зменшується забруднення атмосфери в районі джерела викиду та концентрації забруднюючих речовин у приземному шарі атмосфери. Наприклад, оформіть висновок так:

	A	B	C	D
32				
33	Висновки:			
34	Забруднення повітря у районі джерел			
35	зменшується	при		висоті викидів (труби) H
36	Концентрація домішок у приземному шарі атмосфери			
37	зменшується	при		кількості викидів речовини M
38	зменшується	при		середньої швидкості w_0 та витрат V виходу суміші
39	зменшується	при		різниці температур T_2 газоповітряної суміші та повітря

Якщо при прийнятті рішення виникають труднощі, - змінійте почергово значення відповідних вхідних величин у чарунках стовпчика **C** і слідкуйте, як змінюватимуться показники концентрації забруднювачів у чарунках **H19:H23** (не забувайте після введення кожного нового значення відмінити останню дію!).

14. На аркуші *Місто* підрахуйте зведені показники забруднення по місту в розрізі кожної шкідливої речовини. Для цього:

- вхідні дані змінювати не потрібно (вони нам на даному етапі розрахунків не потрібні і рядки 29-30, 26-27, 5-14 можна за бажанням взагалі вилучити);
- вилучте вміст чарунок **C18:C22**, **C22** та **H18:H22**;
- у чарунці **C18** обчисліть сумарну масу діоксиду сірки, що викидається в атмосферу з усіх підприємств, виконуючи посилання на три аркуші
=СУММ('Підприємство I: Підприємство III'!C18)
- скопіюйте формулу із чарунки **C18** на сусідній діапазон **C19:C22**;
- у чарунці **H18** обчисліть сумарну максимальну концентрацію діоксиду сірки в приземному шарі від усіх підприємств, виконуючи посилання на три аркуші
=СУММ('Підприємство I: Підприємство III'!H18)
- скопіюйте формулу із чарунки **H18** на сусідній діапазон **H19:H22**;
- у чарунці **C22** обчисліть середньозважену небезпечну швидкість вітру по місту, виконуючи посилання на три аркуші
=СРЗНАЧ('Підприємство I: Підприємство III'!C22)

15. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_6.xlsx*. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату А4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері всі аркуші документу *laboratorna_6.xlsx*, що отримані після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію. При собі мати електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Охарактеризуйте атмосферний цикл розсіювання забруднювачів, що викидаються точковими та розподіленими джерелами.
2. На які дві групи можна поділити випадання забруднення у залежності від охопленої території.
3. Якою повинна бути швидкість газу (V_s), що викидається, щоб відвернути відхилення струменя вниз поблизу горловини труби.
4. Яким рівнянням у загальному описується концентрація частинок газу $C(x,y,z)$ в будь-який момент часу для окремих точкових джерел, згідно теорії масопередачі.
5. За якою формулою розраховується концентрація забруднення в напрямку вітру від точкового наземного джерела.
6. Гаусова модель переносу забруднення при викиді від піднятого джерела
7. Чи може забруднення від ряду промислових підприємств, розташованих вздовж річки, порту, або пряма автомагістраль з інтенсивним рухом автотранспорту, моделюватися неперервним безкінечним лінійним джерелом?
8. Куди спрямовані вісі X , Y , Z при моделюванні розповсюдження домішок в атмосфері?
9. За якою формулою здійснюється прогноз максимальної концентрації шкідливої домішки від окремого джерела за дифузійною моделлю?
10. За рахунок зміни яких факторів можна досягти зменшення максимальної концентрації ЗР?

Список рекомендованої літератури:

1. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
2. Гладкий А. В. Основи математичного моделювання в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечський, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
3. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
4. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
5. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. [Навч.посіб] / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр.– Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.– 304 с.
6. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

ТЕМА 7. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ЕКОЛОГІЇ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Тема: Постановка задач популяційної екології та підходи до їх розв'язання. Побудова і дослідження моделей росту та динаміки популяцій

Мета: Опанувати основні підходи до складання математичних моделей популяційної екології

Завдання:

1. Визначити роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем.
2. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій за експоненціальним законом.
3. Дослідити логістичне рівняння зростання чисельності популяцій.
4. Ознайомитися з розробленими математичними моделями популяційної динаміки та біологічних процесів.

Перелік спеціального обладнання та устаткування, необхідного для виконання лабораторних робіт:

Дошка; персональний комп'ютер, зі встановленим пакетом прикладних програм Office та виходом в Internet

Короткий теоретичний коментар

Динамічні моделі – це моделі, що зображають динаміку системи. Розрізняють такі різновиди динаміки: функціонування, зростання, розвиток.

Моделі функціонування відображають процеси, що відбуваються в системі і спрямовані на виконання системою своїх функцій і досягнення цілей.

Моделі зростання і розвитку системи дозволяють простежити розвиток системи упродовж деякого більш тривалого проміжку часу. Необхідно зауважити, що процеси зростання і розвитку не є тотожними. Зростання систем, як правило, пов'язане із збільшенням їх розмірів, включенням у систему деяких об'єктів із зовнішнього середовища, матеріальних та інших ресурсів.

Динаміку систем вивчають із використанням математико-множинних методів, що базуються на положеннях теорії множин. Динаміка системи описується як перехід з одного стану в інший. Сукупність можливих станів системи називають множиною станів. Системи можуть мати дискретні стани (система може перебувати лише в певних, дозволених станах) або неперервні

Динаміку системи розглядають як послідовний перехід системи з одного стану в інший. Теоретико–множинні методи вивчення динаміки систем спрямовані на вивчення керованості системи, стійкості, надійності функціонування, вивчення роботи в даний момент часу і прогнозу розвитку системи в майбутньому. На основі теоретичних розрахунків встановлено, що системи можуть бути безсмертними чи смертними. Для того щоб система існувала вічно, була безсмертною, необхідно, щоб вона розширювалась. Встановлено теорему, згідно з якою щоб система була вічною, потрібно, щоб зростання елементів у системі не відставало від логарифмічного закону.

У загальному випадку математична модель, побудована за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, має такий вигляд:

де $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, ..., $c_n(t)$ – невідомі функції часу, що описують показники (характеристики) компонентів екологічної системи;

$\frac{dc_j}{dt}$ – швидкості зміни показників екосистеми (концентрації речовин, чисельності або біомаси організмів);

f_j – функції, які залежать від зовнішніх і внутрішніх параметрів екосистеми ($j=1, 2, \dots, n$).

Завдання моделювання полягає в тому, щоб розв'язати систему диференціальних рівнянь 14.1, тобто знайти невідомі функції:

$$c_1=F_1(t), c_2=F_2(t), c_3=F_3(t), \dots, c_n=F_n(t), \quad (7.2)$$

які б задовольняли відповідні диференціальні рівняння і додаткові (початкові) умови:

$$c_1(t_0)=c_{10}, c_2(t_0)=c_{20}, \dots, c_n(t_0)=c_{n0} \quad (7.3)$$

Функції (7.2) називають розв'язками, або інтегралами диференціальних рівнянь, а їх графіки, побудовані в $(n+1)$ просторі, називають інтегральними кривими.

Одним із основних об'єктів вивчення у екології та біології, поведінку яких можна досліджувати за допомогою найпростіших математичних моделей, є *популяція* – група організмів одного виду, що впродовж багатьох поколінь займає певний простір і може функціонувати (розмножуватись і розвиватись) за певних умов навколишнього середовища.

Під щільністю популяції розуміють кількість особин (організмів) на одиницю площі або об'єму, наприклад, 500 дерев на 1 га, 200 кг риби на 1 га або 5 млн діатомей на 1 м³. Якщо знехтувати віковими, статевими і генетичними відмінностями, то щільність певного виду досліджуваних організмів може бути повністю математично описана однією змінною величиною – кількістю особин на одиницю площі. Чисельність (щільність) цих популяцій з часом зазнає змін. Навіть якщо популяцію та екосистему вважають незмінними, щільність, народжуваність, рівень виживання (смертність), вікова структура, інтенсивність росту та інші характеристики, як правило, змінюються залежно від сезону, клімату, інших факторів навколишнього середовища.

Екологів найбільше цікавить швидкість змінювання чисельності популяції або її певної вікової групи.

За найсприятливіших умов для розмноження популяції і відсутності лімітуючи факторів швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (7.4)$$

що виражає **закон прямої пропорціональної залежності чи пропорціональної швидкості розмноження** від кількості особин (організмів) цієї популяції. Причому параметр r у рівнянні називають коефіцієнтом швидкості розмноження популяції.

Рівняння 7.4 вперше у 1802 році сформував Томас Мальтус, вважаючи його універсальним законом не лише для всієї природи, а й для суспільства.

Більшість біологічних процесів за сприятливих і стабільних природних умов дуже добре описується **логістичним рівнянням**:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2 \quad (7.5)$$

причому максимальний рівень розмноження популяції визначається ємністю середовища K , а швидкість розмноження (крутість сигмоподібної кривої і положення точки перегину M_0) залежить від величини $r = b - d$.

Точка перегину M_0 має координати $t_p = \frac{1}{r} \ln \frac{K - N_0}{N_0}$, $N(t_p) = \frac{1}{2} K$.

Логістичне рівняння запропонував П. Ферхюльст у 1838 р. Майже через 100 років це рівняння «переформулювали» Р. Перл і Л. Рід. Рівняння Ферхюльста–Перла враховує т. зв. ефект самоотруєння популяції, або внутріпопуляційну боротьбу (конкуренцію), яку описують членом $-r \frac{N^2}{K}$.

Розв'язок логістичного рівняння має **дві важливі властивості**:

- 1) при малих значеннях чисельності (або біомаси) популяції зростання відбувається за експоненціальним законом, як і у рівнянні (7.4);
- 2) з часом чисельність популяції асимптотично наближається до деякого постійного числа K (ємності середовища), перевищити яке чисельність популяції не може (установлюється стійкий стаціонарний (рівноважний) режим).

Порядок і методика виконання завдань

1. Визначити роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем.

Метод теорії диференціальних рівнянь є найефективнішим методом побудови математичних моделей, що описують динаміку екосистем, враховуючи взаємодію як між окремими елементами екосистеми, так і між елементами екосистеми і зовнішніми факторами середовища, в якому функціонує кожен елемент екосистеми. Ці рівняння можуть описувати різні види динаміки біологічних і екологічних процесів, на їх основі будуються математичні моделі розвитку окремих популяцій і біоценозів.

2. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій за експоненціальним законом.

За найсприятливіших умов для розмноження популяції і відсутності лімітуючих факторів швидкість зростання чисельності популяції може бути описана диференціальним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Відповідно, експоненціальна функція, яка є розв'язком цього звичайного диференціального рівняння першого порядку, що описує розмноження мікроорганізмів до моменту виснаження культурального середовища, має вигляд:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)} \quad (7.6)$$

де N_0 – чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$

Такий експоненціальний закон росту вважається універсальним законом не лише для всієї природи, а й для суспільства. Дійсно, багато явищ природи, наприклад, «цвітіння» води у водоймищах, спалах (вибух) чисельності шкідників, розмноження бактерій та інших мікроорганізмів супроводжується зростанням чисельності організмів згідно з експоненціальним законом. За неконтрольованих сприятливих умов потомство однієї пари мух через кілька років важило б більше, ніж земна куля.

Експоненціальний характер властивий багатьом іншим процесам і явищам природи, зокрема поглинанню світла, мономолекулярним хімічним реакціям, зростанню складних відсотків та ін. Проте сприятливі для розмноження умови не можуть довго існувати з огляду на вплив навколишнього середовища, присутність ворогів (хижаків) та інших несприятливих для життя популяції факторів. Взаємодія популяції з іншими та вплив зовнішнього середовища значно зменшують швидкість зростання її чисельності і змінюють закономірності розмноження цієї популяції (угруповання).

3. Дослідити логістичне рівняння зростання чисельності популяцій.

Після інтенсивного зростання чисельність популяції може стабілізуватися на деякому стійкому рівні, тому доцільно описувати його логістичним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2 \quad (7.7)$$

яке часто записують так:

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{K - N}{K} \quad (7.8)$$

де r – питома швидкість розмноження;

$K = N_{max}$ – максимально можлива чисельність популяції (угруповання).

На відміну від лінійного диференціального рівняння (7.4) рівняння (7.8) є нелінійним диференціальним, а нелінійні залежності краще описують реальні об'єкти. Однак нелінійні моделі складніші, і тому їх аналіз має певні, деколи досить значні, труднощі.

Розділивши змінні в рівнянні (7.8), одержимо рівняння:

$$\frac{KdN}{N(K-N)} = rN \quad (7.9)$$

Після певних попередніх розрахунків і інтегрування отримаємо:

$$\frac{N}{K-N} = ae^{rN} \quad (7.10)$$

Якщо відомо, що при $t = 0$ кількість особин була $N = N_0$, то параметр a становитиме:

$$a = \frac{N_0}{K - N_0} \quad (7.11)$$

Шукана функція N зростання чисельності популяції матиме вигляд:

$$N(t) = \frac{aK}{a + e^{-rN}}, a = \frac{N_0}{K - N_0} (0 < a < \infty) \quad (7.12)$$

4. Ознайомитися з розробленими математичними моделями популяційної динаміки та біологічних процесів.

Розглянемо динаміку розвитку популяції організмів, чисельність якої N_{n+1} у момент часу t_{n+1} змінюється за рахунок народження нових організмів “стрибком”, тобто за дуже короткий час у порівнянні з проміжком часу $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ між двома послідовними періодами народження нових організмів. Якщо приріст чисельності (розміру) популяції відбувається пропорційно до наявного її розміру N_n у попередній момент часу t_n , а зменшення – пропорційно до N_n^2 через внутрішньовидову конкуренцію за обмежений ресурс виживання, то динаміка розвитку популяції відображується дискретною моделлю

$$N_{n+1} = b \cdot N_n - d \cdot N_n^2 = b \cdot N_n \cdot \left(1 - \frac{d}{b} N_n\right) \quad (7.13)$$

де b є коефіцієнт розмноження, а d - коефіцієнт конкуренції.

Якщо ввести безрозмірну чисельність (розмір) популяції $a_n = N_n d/b$, то рівняння (7.5) набуває вигляду

$$a_{n+1} = b \cdot a_n \cdot \left(1 - a_n\right) \quad (7.14)$$

Рівняння (7.14) разом з початковою умовою

$$a_n \Big|_{n=0} = a_0 \quad (7.15)$$

де a_0 є початковий розмір популяції, складають дискретну модель динаміки чисельності популяції організмів з внутрішньовидовою конкуренцією.

Стаціонарного стану популяція досягає, коли її розмір a стало повторюється $a_{n+1} = a_n = a$ з кожним циклом репродукції нових організмів. Підстановка a у рівняння (7.14) замість a_{n+1} і a_n дозволяє отримати

квадратичне рівняння відносно стаціонарного розміру а популяції, рішення якого має вигляд:

$$a = \frac{1 - b}{b} \quad (7.16)$$

Модель (7.14) запропонував Р. Мей у 1976 році для демонстрації дуже складної динаміки, що може бути притаманною навіть простим системам довкілля.

Математичні моделі знаходять своє широке застосування в біології. В їх основі, окрім вищезгаданих експоненціальних, лежать дробово-лінійні, тригонометричні, степеневі та інші залежності. Наприклад, дробово-раціональна функція описує залежність між кількістю їжі та швидкістю її споживання (рівняння Міхаеліса-Ментен).

Вагу риби можна обчислювати як функцію від її довжини (кубічна залежність, описана Ф. Барановим):

$$W(L) = b \cdot L^3 \quad (7.17)$$

Тригонометричні функції застосовують для моделювання періодичних процесів, що спостерігаються в природі, наприклад, процес зміни температури протягом доби

$$T(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{12} - \frac{\pi}{2}\right) + 20 \quad (7.18)$$

Рівняння Міхаелеса-Ментен, що виражає швидкість (V) поглинання субстрату мікроорганізмами в залежності від концентрації субстрату (S) записується у вигляді:

$$V(S) = \frac{V_{max} \cdot S}{K + S} \quad (7.19)$$

де V_{max} – максимальна швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами;

V – швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами;

K – константа напівнасичення (концентрація, за якої швидкість поглинання субстрату досягає половини V);

S – концентрація субстрату.

5. *Самостійно в позааудиторний час оформити звіт по роботі. За наявності принтера роздрукувати створений файл laboratorna_7.xlsx.*

Завдання для практичного виконання, порядок і рекомендації щодо їх виконання

Вправа 1. Визначити роль і місце диференціальних рівнянь при моделюванні екологічних систем

1. Пригадайте основні підходи, математичне підґрунтя до моделювання динаміки популяцій.
2. Завантажте програму-браузер, встановлену на Вашому ПК.
3. У всесвітній мережі Інтернет відшукайте інформацію *Про суть суть динамічних моделей*.
4. Відкрийте дві-три сторінки, де розкривається поняття *динамічних моделей* та ознайомтеся з наведеною інформацією.
5. Визначте, де найбільш вдало, на Вашу думку, розкрито дане питання.
6. Знайдену інформацію (не більше двох сторінок) збережіть у новому файлі текстового процесора Microsoft Word, якому надайте назву *laboratorna_7.docx* і збережіть у Вашій папці диска D.
7. Знайдіть у мережі Інтернет одну з існуючих задач моделювання, де враховано фактор часу, що можуть мати місце в біології та екології.
8. Збережіть знайдену інформацію з нової сторінки файлу *laboratorna_7.docx*.
9. Завершіть роботу з програмою-браузером.
10. Закрийте всі відкриті файли.

Вправа 2. Моделювання динаміки чисельності окремих популяцій за експоненціальним законом

1. Пригадайте, у яких випадках ріст чисельності популяцій моделюється диференціальним рівнянням $\frac{dN}{dt} = rN$
2. Для ознайомлення з експоненційним законом росту чисельності популяції розв'яжіть приклад 1:

Приклад 1.

Дослідіть експоненціальну функцію для життєдіяльності мікроорганізмів за заданими параметрами: їх розмноження (при $r > 0$) та їх загибель (при $r < 0$).

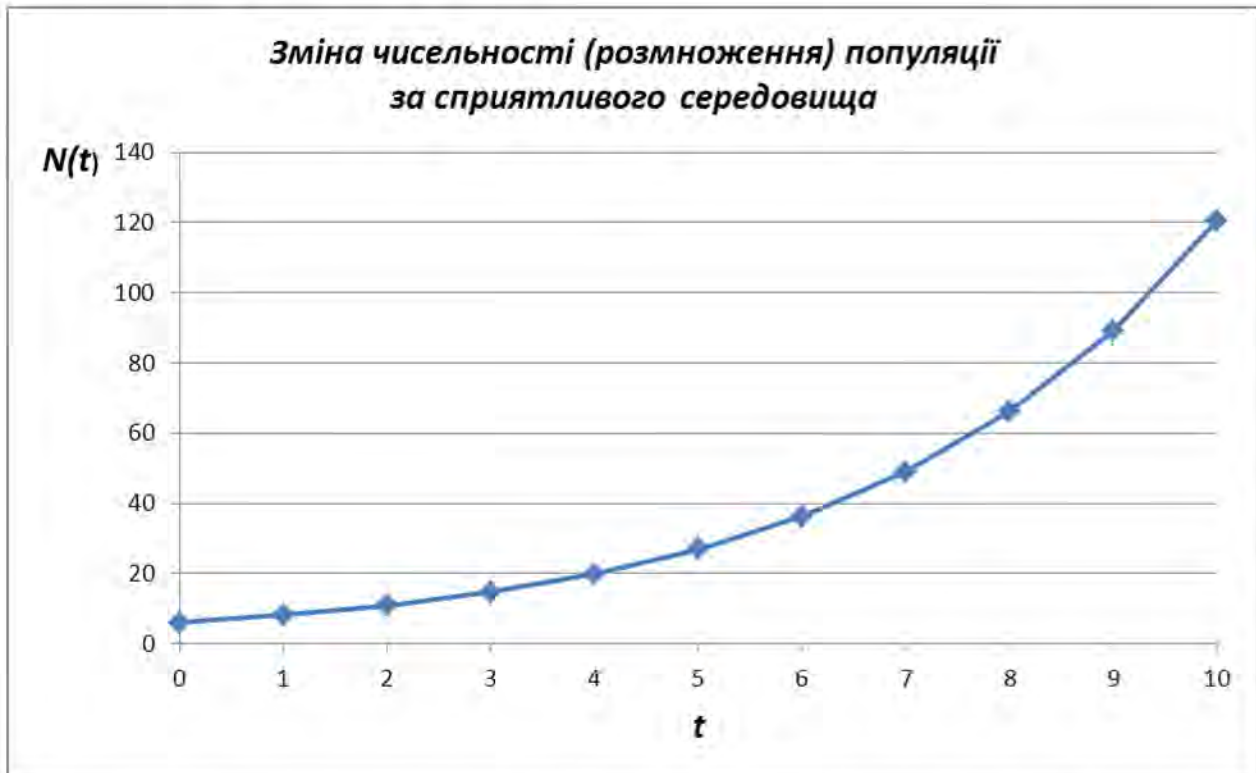
Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 = 6$	$N_0 = 6$
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r = 0,3$	$r = -0,3$
Часовий діапазон	$t = 0,10$	$t = 0,10$

3. Для розв'язання *прикладу 1* завантажте табличний процесор Microsoft Excel і створіть новий документ.
4. Надайте аркушу *Лист 1* назву *Приклад_1*.
5. На аркуші *Приклад_1* в окремі чарунки діапазону **A3:C5** введіть вхідні дані до *прикладу 1* та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком

	A	B	C
1	Експоненціальний закон зміни		
2	чисельності популяції		
3	Вихідні дані:		
4	Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 =$	6
5	Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r =$	0,3
6			
7	Розрахунки		
8		t	N(t)
9		0	6
10		1	8
11		2	11
12		3	15
13		4	20
14		5	27
15		6	36
16		7	49
17		8	66
18		9	89
19		10	121

6. У чарунки діапазону **B9:B19** введіть моменти часу від 0 до 10, користуючись засобом автозаповнення.
7. Для розрахунку чисельності мікроорганізмів до моменту виснаження культурального середовища у чарунку **C9** введіть експоненціальну функцію (7.6), задавши абсолютні посилання на відповідні чарунки (в Excel для розрахунку експоненти використовується вбудована функція **=EXP()**).
8. Скопіюйте формулу з чарунки **C9** на сусідній діапазон чарунок **C10:C19**, використовуючи засіб автозаповнення. Округліть отримані результати в діапазоні **C9:C19** до цілого числа.
9. Прослідкуйте зміну чисельності популяцій на графіку (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C9:C19**).
10. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком
 - за командою **Выбрать данные** стрічки **Конструктор** у полі **Подписи горизонтальной оси** натисніть **Изменить** та виділіть діапазон **B9:B19**

- за командами стрічки **Макет** додайте назву діаграми та назву осей;
- виділіть вісь **x** і за командою **Формат...** її контекстного меню задайте опцію **Положение оси по делениям**.



11. Проаналізуйте результат і збережіть створений документ у Вашій папці диску D: з власним іменем *laboratorna_7.xlsx*.
12. Створіть копію аркуша *Приклад_1*.
13. На аркуші *Приклад_1(1)* дослідіть функцію загибелі популяції, коли швидкість розмноження популяції менше 0. Для цього введіть у чарунку **C5** коефіцієнт $r = -0.3$.
14. Змініть назву діаграми на аркуші *Приклад_1(1)*.
15. Проаналізуйте результат і збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_7.xlsx*.

Вправа 3. Дослідити логістичне рівняння зростання чисельності популяцій

1. Пригадайте, у яких випадках ріст чисельності популяцій моделюється логістичним диференціальним рівнянням $\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} N^2$
2. Для ознайомлення з логістичним законом зміни чисельності популяції розв'яжіть приклад 2:

Приклад 2.

Дослідіть логістичне рівняння, що виражає зростання чисельності популяцій за заданими параметрами:

Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 = 4$
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r = 0,4$
Максимально можлива чисельність популяції (угруповання) $K = N_{max}$	$K = 50$
Часовий діапазон	$t = 0,20$

- Для розв'язання **прикладу 2** у файлі *laboratorna_7.xlsx* додайте новий аркуш, якому надайте назву **Приклад_2**.
- На аркуші **Приклад_2** в окремі чарунки діапазону **A3:C6** введіть вхідні дані до **прикладу 2** та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком
- У чарунку **C9** введіть формулу (7.11) для обчислення параметра **a** (в Excel для розрахунку натурального логарифму використовується вбудована функція **=LN()**)
- У чарунки діапазону **B12:B32** введіть моменти часу від 0 до 20, користуючись засобом автозаповнення.
- Для розрахунку чисельності популяції у чарунку **C12** введіть логістичну функцію (7.12), задавши абсолютні посилання на відповідні чарунки.
- Скопіюйте формулу з чарунки **C12** на сусідній діапазон чарунок **C13:C32**, використовуючи засіб автозаповнення. Округліть отримані результати в діапазоні **C12:C32** до цілого числа.
- Прослідкуйте зміну чисельності популяцій на графіку (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C12:C32**).
- Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком.
- Зверніть увагу, що на малих значеннях проміжку часу зростання відбувається за експоненціальним законом, а з часом чисельність популяції наближається до деякого постійного числа (ємності середовища) $K = N_{max}$.

Логістичне рівняння зміни чисельності популяції		
Вихідні дані:		
Чисельність популяції у початковий момент часу $t = t_0$	$N_0 =$	4
Коефіцієнт швидкості розмноження популяції	$r =$	0,4
Максимально можлива чисельність популяції (угруповання) $K = N_{max}$	$K =$	50
Розрахунки		
	$a =$	0,09
	t	N(t)
	0	4
	1	6
	2	8
	3	11
	4	15
	5	20
	6	24
	7	29
	8	34
	9	38
	10	41
	11	44
	12	46
	13	47
	14	48
	15	49
	16	49
	17	49
	18	50
	19	50
	20	50
	Σ	25



12. У чарунках **B34, C34** розрахуйте координати точки перегину за формулами

$$t_p = \frac{1}{r} \ln \frac{K - N_0}{N_0}, \quad N(t_p) = \frac{1}{2} K$$

13. Із використанням авто фігур (Надписів, Ліній), намалуйте на графіку асимптоту, її координати та точку перегину.
14. Спробуйте змінити значення r – швидкість розмноження популяції. Проаналізуйте, як зміниться крутість сигмоподібної кривої і положення точки перегину M_0 (наскільки швидше буде досягнуто максимальне значення чисельності популяції).
15. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_7.xlsx*.

Вправа 4. Ознайомитися з розробленими математичними моделями популяційної динаміки та біологічних процесів

1. Пригадайте відомі Вам математичні моделі популяційної динаміки та біологічних процесів.
2. Ознайомтеся з моделлю динаміки популяцій, запропонованої Р. Мей, розв'язавши приклад 3:

Приклад 3.

Здійсніть необхідні розрахунки, що ілюструють особливості моделі динаміки популяцій, запропонованої Р. Мей.

Дослідіть зміну розміру певної популяції, початковий розмір якої 0,2 ум.од, якщо коефіцієнт розмноження знаходиться у межах від 0 до 3; від 3 до 3,5. Наведіть графічне відображення процесу зміни розміру популяції при різних величинах коефіцієнта розмноження.

- Для розв'язання **прикладу 3** у файлі *laboratorna_7.xlsx* додайте новий аркуш, якому надайте назву **Приклад_3**.
- На аркуші **Приклад_3** в окремі чарунки діапазону **A3:E5** введіть вхідні дані до **прикладу 3** (значення коефіцієнта розмноження $b=0,5$; $b=1,5$; $b=2,5$ та початковий розмір популяції $a_0=0,2$) та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком

	A	B	C	D	E
1	Моделювання чисельності популяції				
2	за моделлю Р. Мей				
3	n	a_n	б=	б=	б=
4			0,5	1,5	2,5
5	0	a₀	0,2	0,2	0,2
6	1	a ₁	0,0800000	0,2400000	0,400
7	2	a ₂	0,0368000	0,2736000	0,600
8	3	a ₃	0,0177229	0,2981146	0,600
9	4	a ₄	0,0087044	0,3138634	0,600
10	5	a ₅	0,0043143	0,3230298	0,600
11	6	a ₆	0,0021478	0,3280223	0,600
12	7	a ₇	0,0010716	0,3306355	0,600
13	8	a ₈	0,0005352	0,3319735	0,600
14	9	a ₉	0,0002675	0,3326506	0,600
15	10	a ₁₀	0,0001337	0,3329913	0,600
16	11	a ₁₁	0,0000668	0,3331621	0,600
17	12	a ₁₂	0,0000334	0,3332477	0,600
18	13	a ₁₃	0,0000167	0,3332905	0,600
19	14	a ₁₄	0,0000084	0,3333119	0,600
20	15	a ₁₅	0,0000042	0,3333226	0,600
21	16	a ₁₆	0,0000021	0,3333280	0,600
22	17	a ₁₇	0,0000010	0,3333307	0,600
23	18	a ₁₈	0,0000005	0,3333320	0,600
24	19	a ₁₉	0,0000003	0,3333327	0,600
25	20	a ₂₀	0,0000001	0,3333330	0,600

*Рис.7.1 Приклад оформлення ЕТ
для розрахунку зміни розміру популяцій у часі*

- У чарунки діапазону **A6:A25** введіть моменти часу від 0 до 20, а в чарунки діапазону **B6:B25** введіть позначення чисельності популяції у відповідний момент часу, користуючись засобом автозаповнення.
- Для розрахунку чисельності популяції a_1 за коефіцієнта розмноження $b=0,5$ у чарунку **C6** введіть рівняння Р. Мей (7.14), задавши абсолютні посилання на відповідну чарунку.

$$=C\$4*C5*(1-C5)$$

7. Для розрахунку чисельності популяції за коефіцієнтів розмноження $b=1,5$; $b=2,5$, скопіюйте формулу з чарунки **C6** на сусідній діапазон чарунок **D6:E6**. Змініть у отриманих формулах абсолютне посилання на відповідні чарунки

$$= \$D\$4 * D5 * (1 - D5)$$

$$= \$E\$4 * E5 * (1 - E5)$$

8. Для розрахунку чисельності популяції $a_1, a_2, \dots, a_n$ в наступні 20 періодів, скопіюйте формулу з чарунки **C6** на сусідній діапазон чарунок **C7:C25**, скопіюйте формулу з чарунки **D6** на сусідній діапазон чарунок **D7:D25**, скопіюйте формулу з чарунки **E6** на сусідній діапазон чарунок **E7:E25**.
9. Наведіть графічне відображення процесу зміни розміру популяції при різних величинах коефіцієнта розмноження $0 < b < 3$ (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C5:E25**).
10. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком (рис. 7.2). З графіків видно, що популяція за кілька ітерацій практично досягає сталого стаціонарного розміру $a_{n+1} = a_n = a$.

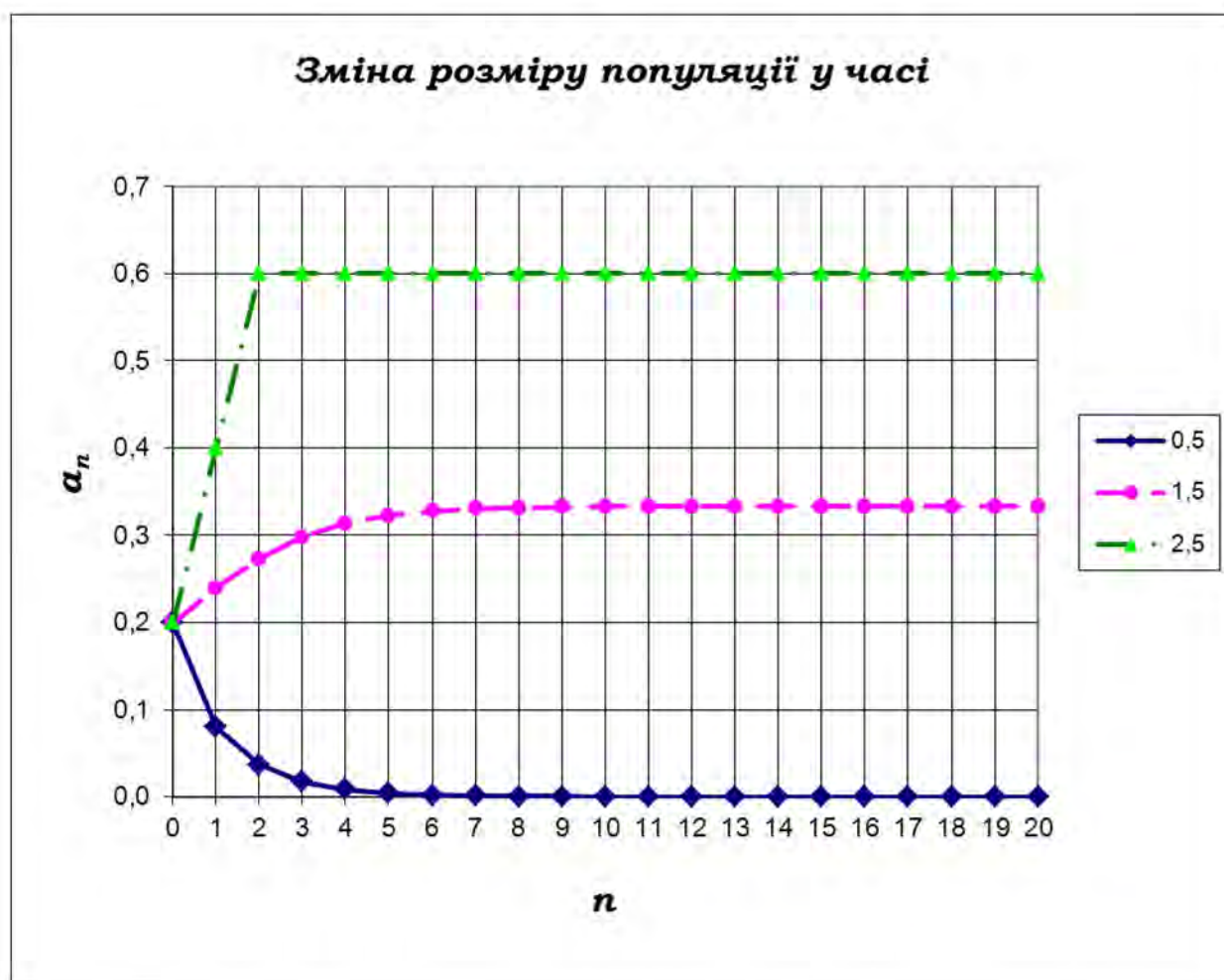


Рис.7.2. Зміна розміру популяції у часі, якщо коефіцієнт розмноження знаходиться у межах $0 < b < 3$

16. Створіть дві копії аркуша *Приклад_3*.
17. На аркуші *Приклад_3(1)* дослідіть чисельність популяції, коли коефіцієнт розмноження знаходиться в межах $3 < b < 3,6$. Для цього введіть у чарунки **C4:E4** значення, наприклад, $b=3,2$, $b=3,46$ і $b=3,56$
18. Прослідкуйте на графіку відображення даної ситуації (рис. 7.3).

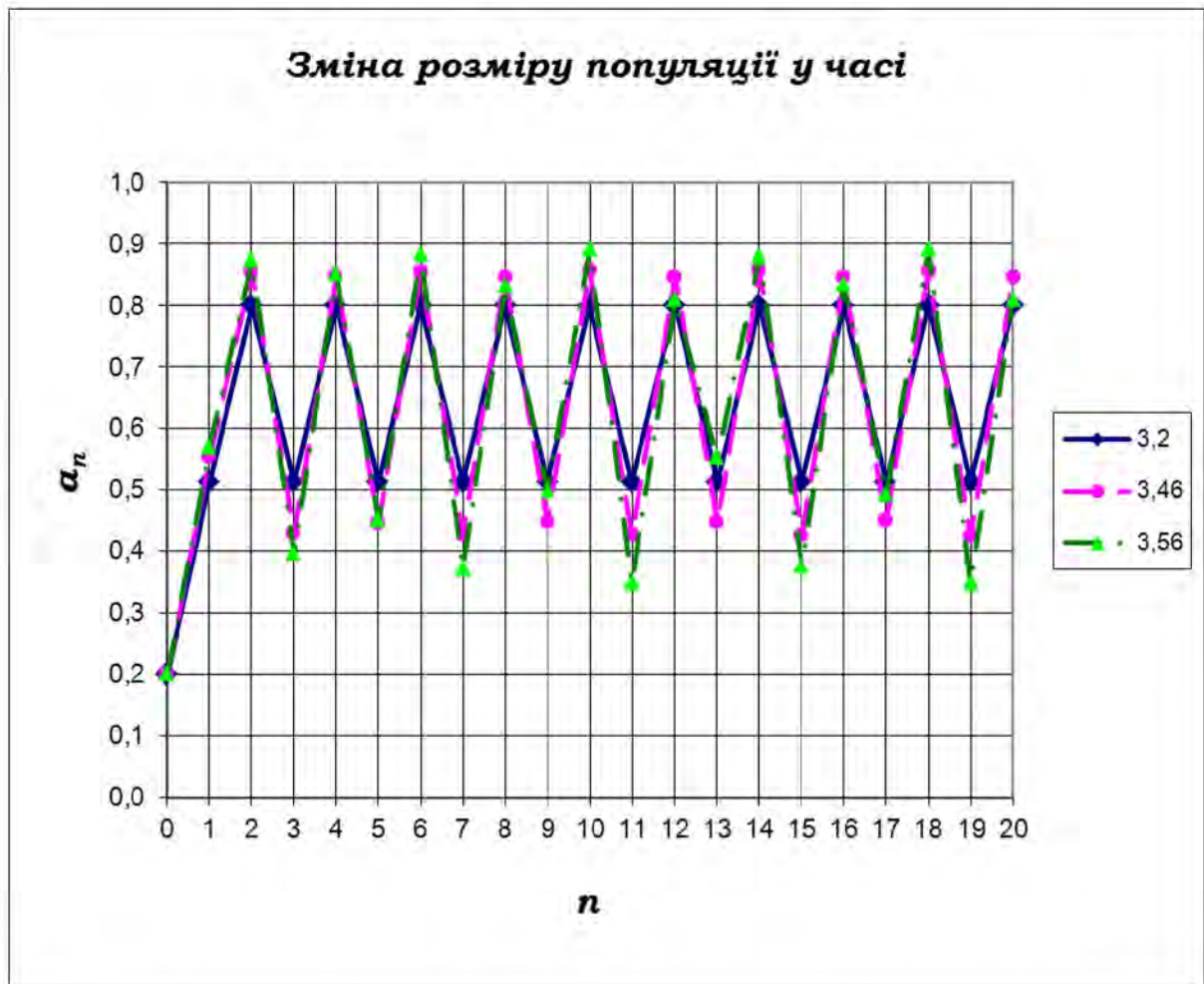


Рис.7.3 Зміна розміру популяції у часі, якщо коефіцієнт розмноження знаходиться у межах $3 < b < 3,6$

З графіків видно, що популяція вже не досягає сталого стаціонарного розміру, а виходить на режим коливань з періодом 2, 4 і 8 (для різних b) циклів репродукції нових організмів. Подвоєння періоду коливань триває з подальшим зростанням коефіцієнта b , так що відстань між найближчими точками біфуркації стає все меншою.

19. На аркуші *Приклад_3(2)* здійсніть відповідні розрахунки зміни розміру популяцій, якщо коефіцієнт розмноження $b=3,95$, а початкова кількість популяції різниться на 0,001 ум.од. для наступних 50-ти моментів часу. Для цього введіть відповідні вихідні дані в чарунки **C4:D5**, а стовпчик **E** можна вилучити або очистити.

	A	B	C	D	E
1	Моделювання чисельності популяції				
2	за моделлю Р. Меї				
3			$b=$	$b=$	
4	n	a_n	3,95	3,95	
5	0	a_0	0,200	0,201	
6	1	a_1	0,6320000	0,6343661	

20. Наведіть відповідну графічну інтерпретацію (рис 7.4) та проаналізуйте результат

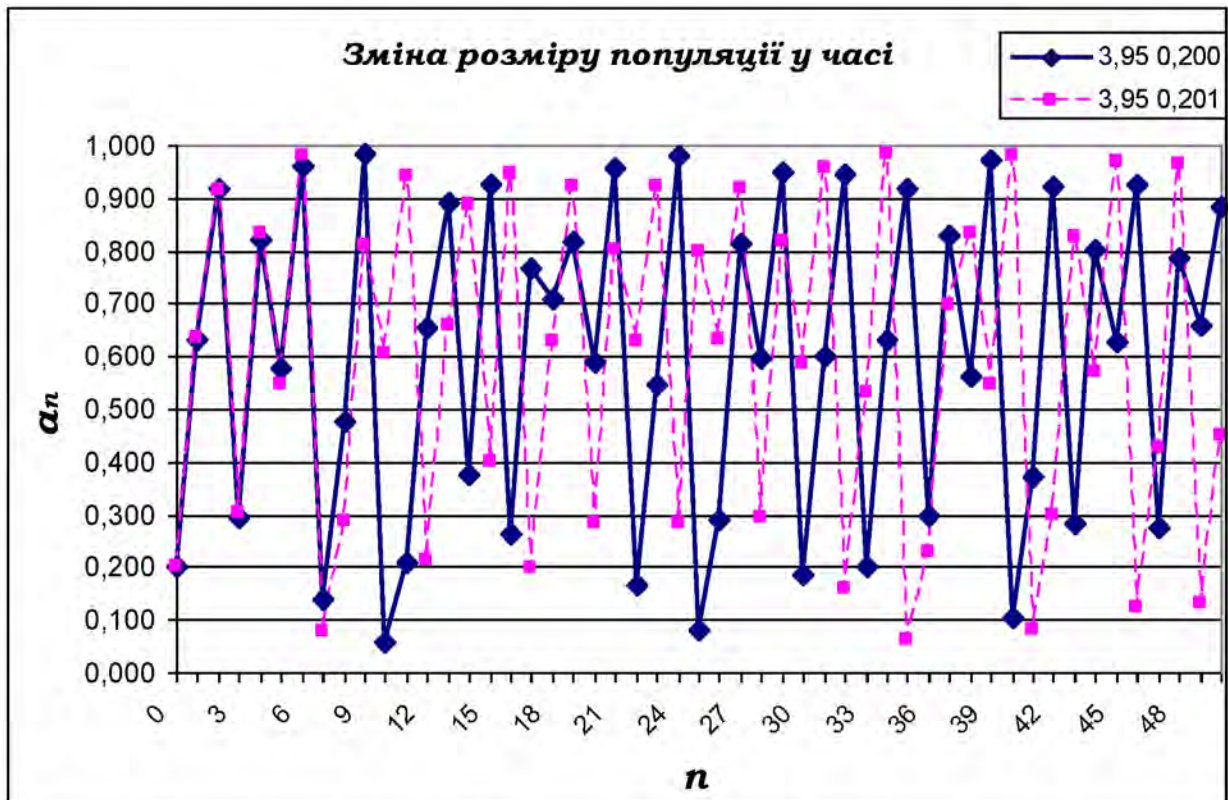


Рис.7.4 Коливання зміни розміру популяції у режимі динамічного хаосу

Якщо коефіцієнт розмноження впритул наближається до граничної величини $b=4$, то період коливань чисельності популяції стає необмежено великим, вони щільно покривають інтервал можливих значень $0 < a_n < 1$ і чергуються у послідовності, яку можна сприйняти як послідовність випадкових чисел. Такий режим “хаотичної” зміни будь-якої величини називають динамічним хаосом.

Порівнянням графіків на рис. 7.4 можна прийти до висновку, що прогнозування чисельності популяції у режимі динамічного хаосу на тривалий період часу не є можливим через надзвичайну чутливість прогнозу до точності, з якою визначаються параметри процесу a_0 і b .

21. Для ознайомлення з рівнянням Міхаеліса-Ментен на основі дробно-раціональної функції, що може мати місце в біології, розв'яжіть Приклад 4:

Приклад 4.

Дослідіть залежність швидкості (V) поїдання субстрату мікроорганізмами від концентрації субстрату (S) за заданими параметрами:

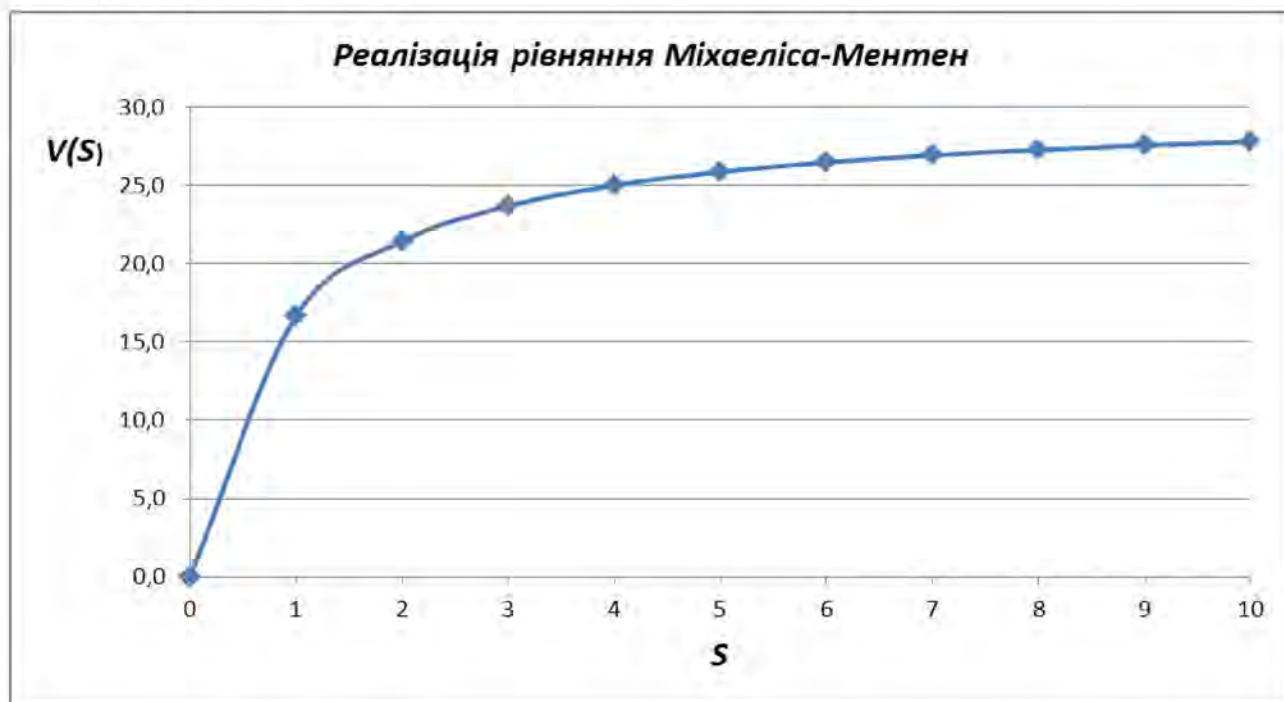
Максимальна швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами	$V_{max} = 30$
Константа напівнасичення (концентрація, за якої швидкість поглинання субстрату досягає половини V)	$K = 0,8$
Концентрація субстрату	$S = \overline{0,10}$

21. Для розв'язання **прикладу 4** у файлі *laboratorna_7.xlsx* додайте новий аркуш, якому надайте назву **Приклад_4**.
22. На аркуші **Приклад_4** в окремі чарунки діапазону **A3:C5** введіть вхідні дані до **прикладу 4** та відформатуйте електронний документ за наведеним зразком

	A	B	C
1	Моделювання швидкості поїдання мікроорганізмами субстрату від його кількості		
2			
3	Вихідні дані:		
4	Максимальна швидкість поїдання субстрату мікроорганізмами	$V_{max} =$	30
5	Константа напівнасичення (концентрація, за якої швидкість поглинання субстрату досягає половини V)	$K =$	0,8
6			
7	Розрахунки		
8		S	V(S)
9		0	0,0
10		1	16,7
11		2	21,4
12		3	23,7
13		4	25,0
14		5	25,9
15		6	26,5
16		7	26,9
17		8	27,3
18		9	27,6
19		10	27,8

23. У чарунки діапазону **B9:B19** введіть кількість субстрату від 0 до 10, користуючись засобом автозаповнення.
24. Для швидкості поїдання субстрату у чарунку **C9** введіть рівняння (7.19) Міхаеліса-Ментен.
25. Скопіюйте формулу з чарунки **C9** на сусідній діапазон чарунок **C10:C19**, використовуючи засіб автозаповнення. Округліть отримані результати в діапазоні **C9:C19** до одного знаку після коми.

26. Прослідкуйте зміну швидкості споживання їжі від її кількості на графіку (побудуйте графік із маркерами за даними діапазону **C9:C19**). Переконайтеся, що графіком є гіпербола, яку ще називають *гіперболою Міхаеліса*.
27. Відредагуйте та відформатуйте графік за наведеним зразком (зробіть лінію графіка згладженою).



28. Проаналізуйте результат: коли кількість (концентрація) субстрату необмежено зростає, швидкість поглинання прямує до сталої величини V_{max} .
29. Збережіть внесені зміни у файлі *laboratorna_7.xlsx* та завершіть роботу з табличним процесором.
30. Виконану роботу продемонструйте викладачу та в позааудиторний час оформіть звіт по роботі.

Вимоги щодо оформлення та порядку подання звіту з лабораторної роботи

Після виконання лабораторної роботи необхідно оформити звіт.

Звіти оформлюються на стандартних аркушах формату A4 (210×297 мм), при цьому текст розміщується на одній стороні аркушу.

У звіті по роботі має бути зазначена тема роботи та роздруковані на принтері всі аркуші документів *laboratorna_7.xlsx* та *laboratorna_7.docx*, що отримані після виконання завдань.

Для захисту звіту здобувачу необхідно особисто з'явитись на наступне заняття або консультацію, маючи електронний варіант виконаного завдання.

Контрольні запитання для захисту звітів:

1. Наведіть визначення динамічних моделей.
2. Що виділяє динамічні моделі від інших моделей?
3. Який математичний апарат використовується для розв'язання задач, що враховують фактор часу?
4. Назвіть типи задач, що можуть мати місце в екології та біології і моделюються на основі диференціальних рівнянь.
5. Який математичний апарат лежить в основі моделей щодо розрахунку чисельності популяцій?
6. Які розроблені науковцями математичні моделі динаміки популяцій Вам відомі?
7. Вкажіть експоненційний закон росту до моменту виснаження культурального середовища.
8. Наведіть загальне логістичне диференціальне рівняння розмноження популяцій.
9. Яке рівняння лежить в основі моделі хижака-жертви?
10. Чому неможливо надавати тривалого прогнозу стану динамічної системи, якщо вона перебуває у стані, що близький до динамічного хаосу?

Список рекомендованої літератури:

1. Адамень Ф. Ф. Основы математического моделирования агробиопроцесов / Ф. Ф. Адамень, В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова. – К.: Нора-принт, 2005. – 372 с.
2. Богобоящий В. В. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підручник] / В.В. Богобоящий, К.Р. Курбанок, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. - К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.
3. Гладкий А. В. Основы математического моделирования в екології: [навч. посіб.] / А. В. Гладкий, І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, Ю. А. Гладка. – К: НТУУ «КПІ», 2009.– 240 с.
4. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2002. – 203 с.
5. Лаврик В. І. Моделювання і прогнозування стану довкілля : [навч. посіб]. / В. І. Лаврик. – К. : ВД КМ Академія, 2010. – 400 с.
6. Ясковець І. І. Моделювання та прогнозування стану довкілля: [навч. посібник] / І. І. Ясковець, Н. М. Протас, Д. Ю. Касаткін, Т. Ю. Осипова.– К.: ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ», 2016.–540 с.

Підписано до друку 03.09.2019
Гарнітура Таймс. Друк – ксерокопія. Папір ксероксний.
Ум. друк. арк. _____. Обл. вид. арк. _____. Наклад 15.
ПДАА, вул. Сковороди, 1/3, м. Полтава, 36003

