МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Флегантов Л.О.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Антонець А.В.,
кандидат педагогічних наук, доцент

Мета статті – представити концепцію компартаментної математичної моделі динаміки груп населення під час епідемій інфекційних захворювань.

На цей час існує ряд математичних моделей такого роду. Найпростіша, модель SIR, описує динаміку трьох основних класів населення: S – susceptible (сприйнятливі до інфекції: неізольовані, не мають імунітету); I – infectious (інфіковані, хворі); R – recovered / immune (одужали / набули імунітет після хвороби) при сталій кількості населення. На основі SIR можна будувати більш складні епідеміологічні моделі. Наприклад, модель MSEIRS, де M – maternally derived immunity – немовлята, які від народження тимчасово мають успадкований «материнський» імунітет, E – for exposed – інфіковані у прихованій фазі, враховує, що індивіди класу R можуть згодом втрачати імунітет [1, 2, 4].

Представлена розробка моделі описує динаміку 6 класів населення MSEIRSC з урахуванням процесів народження-смерті, а також класу D (dead), та можливості, що певна частка індивідів групи R може надалі залишатися носіями інфекції C (carrier):

$$M_{t+1} = M_t + \lambda S_t - \mu_1 M_t - \mu M_t;$$

$$S_{t+1} = S_t + \delta M_t + \tau R_t - (1-\psi_S)(S_t - \psi_{S0} S_0)\left(\beta_I (1-\psi_I) I_t + \beta_E (1-\psi_E) E_t + \beta_C (1-\psi_C) C_t\right) - \mu S_t;$$

$$E_{t+1} = E_t + (1-\psi_S)(S_t - \psi_{S0} S_0)\left(\beta_I (1-\psi_I) I_t + \beta_E (1-\psi_E) E_t + \beta_C (1-\psi_C) C_t\right) - \varepsilon E_t - \mu E_t;$$

$$I_{t+1} = I_t + \varepsilon E_t - \gamma I_t - \mu_2 I_t - \mu I_t; \; R_{t+1} = R_t + \alpha \gamma I_t - \tau R_t - \mu R_t; \; C_{t+1} = C_t + (1-\alpha)\gamma I_t - \mu C_t;$$

$$N_{t+1} = N_t + \lambda S_t - \mu_1 M_t - \mu_2 I_t - \mu (S_t + E_t + R_t + C_t);$$

$$D_{1\,t+1} = D_{1t} + \mu_1 M_t; \; D_{2\,t+1} = D_{2t} + \mu_2 I_t; \; D_{3\,t+1} = D_{3t} + \mu (S_t + E_t + R_t + C_t);$$

$$N_t = M_t + S_t + E_t + I_t + R_t + C_t; \; D_t = D_{1t} + D_{2t} + D_{3t}.$$

Емпіричні коефіцієнти моделі:

$\lambda = 0..0,00035$ – характеризує динаміку народжуваності;

$\mu_1 = 0..1$ – характеризує звичайну смертність дітей до 1 року;

$\mu_2 = 0..1$ – смертність від інфекції (відсоток летальних випадків);

$\mu = 0..1$ – звичайна смертність від причин, не пов'язаних з інфекцією;

M тимчасового «материнського» імунітету);

$\alpha = 0..1$ – частка осіб, які після хвороби одужують повністю, набувають (тимчасовий) імунітет і не є носіями інфекції;

$\beta = 0..0,002$ – середня кількість контактів людини за одиницю часу (день), помножена на ймовірність захворювання сприйнятливого суб'єкта S від носія інфекції E, I або C, відповідно;

$\delta = 0..1$ – характеризує динаміку переходу M→S (швидкість втрати немовлятами
$\varepsilon = 0..1$ – характеризує динаміку переходу E→I (швидкість переходу інфікованого у прихованій фазі E до активної фази захворювання I);
$\gamma = 0..0,5$ – характеризує динаміку переходу I→R (швидкість одужання);
$\tau = 0..1$ – характеризує динаміку переходу R→S (швидкість втрати тимчасового імунітету одужавшими);
$\psi = 0..1$ – частка ізольованих осіб у класі S, E, I або C, або відсоток населення, який був ізольований (або імунний) до початку епідемії.

На малюнку (рис. 1) представлені результати розрахунків, виконаних на у середовищі GeoGebra [3].

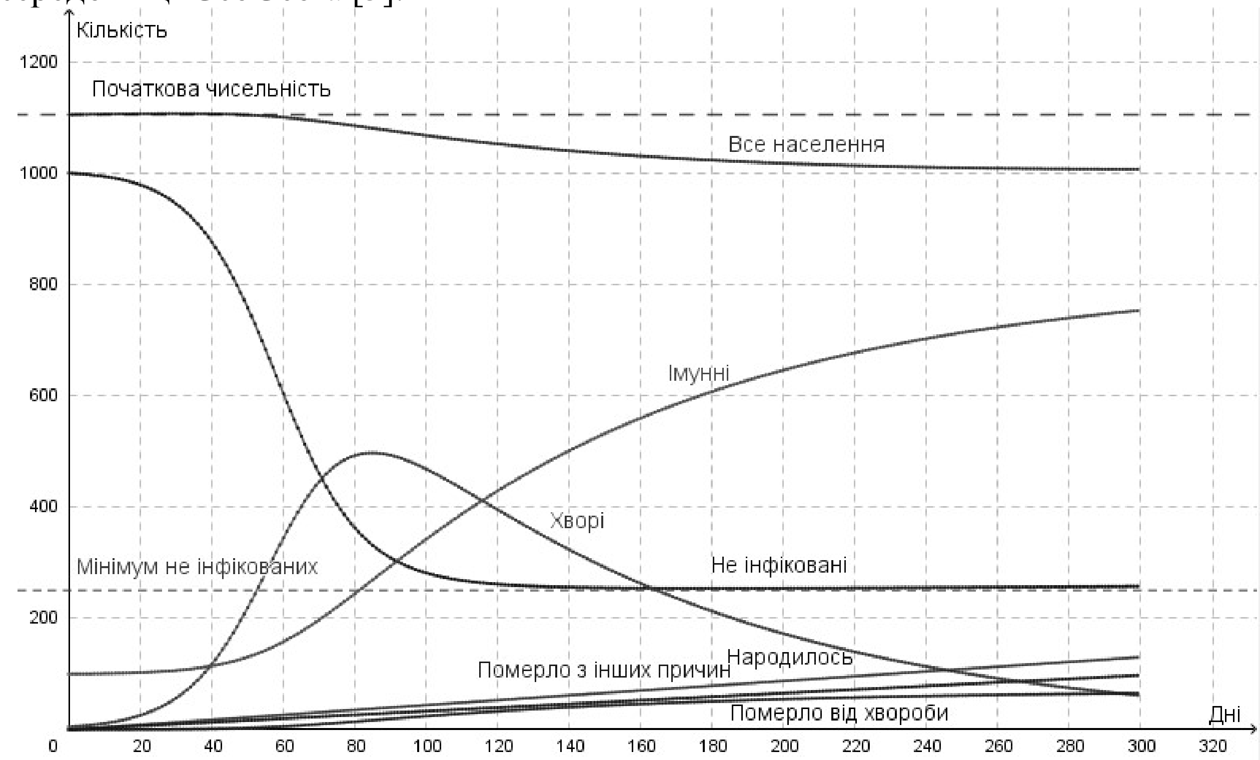

Рис. 1. Ймовірний сценарій динаміки чисельності основних груп населення згідно моделі MSEIRSC.

Список використаних джерел

1. Compartmental models in epidemiology – Wikipedia. The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology (2017). Accessed 06 Apr 2020
2. Engl, J. Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende. Berlin: Springer Spektrum. (2018)
3. Flehantov, L., Ovsiienko Yu.: The Simultaneous Use of Excel and GeoGebra to Training the Basics of Mathematical Modeling. ICT in Education, Research, and Industrial Applications. Proc. 15th Int. Conf. ICTERI 2019. / Ermolayev, V., Mallet, F., Yakovyna, V., Kharchenko, V., Kobets, V., Korniłowicz, A., Kravtsov, H., Semerikov, S., and Spivakovsky, A. (Eds.). Volume II: Workshops. Kherson, 12-15 June, 864-879 (2019).

4. Wesolowski, A., zu Erbach-Schoenberg, E., Tatem, A.J. et al. Multinational patterns of seasonal asymmetry in human movement influence infectious disease dynamics. Nat Commun 8, 2069 (2017). https://doi.org/10.1038/s41467-017-02064-4 https://www.nature.com/ articles/s41467- 017-02064-4