

УДК 621.647.23

С.Б. Ковальчук, О.В. Горик*Полтавська державна аграрна академія, Полтава, Україна***РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ ІЗ ПЛОСКОЮ ВІССЮ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ У ПРИРОДНІЙ КРИВОЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ**

У роботі отримані загальні залежності між компонентами напружено-деформованого стану для композитного дискретно-неоднорідного бруса із криволінійною плоскою віссю та постійною по довжині структурною будовою, що перебуває під дією статичних, динамічних та температурних навантажень, за пружної роботи ортотропних матеріалів фаз. Для отримання залежностей застосована природна, для будови бруса, криволінійна циліндрична система координат, що дозволило вивести інваріантні до форми осі бруса рівняння, які можуть бути використані для розв'язання широкого кола прикладних задач.

Ключові слова: криволінійний брус; композит; природна система координат; напруження; деформації; переміщення.

*Форм. 32. Рис. 4. Літ. 8***С.Б. Ковальчук, О.В. Горик****УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ БРУСЬЕВ С ПЛОСКОЙ ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ЕСТЕСТВЕННОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ**

В работе получены общие зависимости между компонентами напряженно-деформированного состояния для композитного дискретно-неоднородного бруса с криволинейной плоской осью и неизменным по длине структурным строением, который находится под действием статических, динамических и температурных нагрузок, при упругой работе ортотропных материалов фаз. Для получения зависимостей применена естественная, для строения бруса, криволинейная цилиндрическая система координат, что позволило вывести инвариантные к форме оси бруса уравнения, которые могут быть использованы для решения широкого круга прикладных задач.

Ключевые слова: криволинейный брус; композит; естественная система координат; напряжения; деформации; перемещения.

S. Kovalchuk, O. Goryk**EQUATIONS OF THE ELASTICITY THEORY FOR COMPOSITE BARS WITH A PLANE AXLE OF AN ARBITRARY FORM IN NATURAL CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM**

The work deals with the general dependences between the components of the stress-strain state for the composite discrete-inhomogeneous bar with a curvilinear plane axle of an arbitrary shape and the length-unchanged structural construction, that is subject to static, dynamic and temperature loads during the elastic behavior of orthotropic phase materials. To describe the geometry and the structural construction of the inhomogeneous bar it is proposed the use of natural curvilinear cylindrical coordinate system, which is tied to the shape of its axle, that allowed to reduce the number of variables in the functions of elastic characteristics and external load. The dependences between the components of the stress-strain state are constructed on the basis of the equations of the linear theory of elasticity in a rectangular spatial coordinate system by their coordinate transformation to the natural coordinate system. This made it possible to obtain relations invariant with respect to the shape of the bar, which can be used to solve a wide range of problems in mechanics of elastic deformation of structural elements of arbitrary curvature.

Keywords: curvilinear bar; composite; natural coordinate system; stresses; strains; displacement.

Постановка проблеми. Із розвитком технологій створення конструкційних матеріалів, у сучасному машинобудуванні та будівництві все більш актуальним стає застосування композитних матеріалів у конструкціях різного призначення. Однак суттєвою перешкодою на шляху широкого впровадження композитних матеріалів у практику проектування є недостатній рівень розвитку аналітичних теорій деформування композитних елементів та систем. Меншою мірою це стосується композитних оболонок та пластин, більшою – композитних брусів. І якщо для прямолінійних композитних брусів окремі види деформування достатньо добре досліджені, як на фундаментальному [1], так і прикладному рівні [2], то для криволінійних брусів і кілець, які широко представлені в інженерних конструкціях, зустрічаються лише розв'язки окремих задач для елементів із круговою віссю, наприклад [4, 5, 6, 7]. Тому дослідження, направлені на розвиток теорії деформування композитних криволінійних брусів, є актуальними і важливими, як з наукової так і з практичної точки зору.

Напружено-деформований стан (НДС) композитного криволінійного бруса у випадку пружного деформування теоретично може бути визначений шляхом розв'язання класичної системи рівнянь лінійної теорії пружності, отриманої у прямокутній декартовій, циліндричній

круговій або сферичній системах координат. Однак, застосування таких рівнянь створює додаткові математичні проблеми при врахуванні граничних умов та описанні структурної будови композитного бруса з криволінійною віссю. Більш зручним для розв'язання задач деформування таких елементів є застосування рівнянь отриманих для криволінійної системи координат, яка відповідає геометричній формі об'єкту розрахунку. У науковій літературі висвітлені рівняння для окремих випадків криволінійних систем, однак для побудови загальної теорії деформування криволінійних композитних брусів корисним буде більш узагальнений підхід, який передбачає застосування природної для будови бруса криволінійної циліндричної системи координат [8]. Така система координат дозволяє аналітично описати геометрію поверхонь криволінійного бруса, його структурну будову, фізико-механічні характеристики матеріалу та зовнішні навантаження із використанням функцій з найменшою кількістю незалежних змінних.

Мета статті: побудувати систему рівнянь лінійної теорії пружності у природній криволінійній циліндричній системі координат, як вихідну систему для розв'язання задач деформування композитних брусів із криволінійною плоскою віссю довільної форми та постійною по довжині структурною будовою.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо криволінійний композитний брус, утворений дискретними однозв'язними або багатозв'язними фазами $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_m$ різнохідного матеріалу, із чіткою границею розділу (рис. 1). Для бруса вважатимемо справедливою гіпотезу про абсолютно жорсткий контакт фаз, за якої виключені їх відносне зміщення та відрив.

Вісь бруса є плоскою шматково-гладкою кривою g_C , що проходить через центри жорсткості C усіх поперечних перерізів і лежить у площині симетрії бруса A . Поперечний переріз бруса має незмінну форму та структурну будову вздовж осі g_C .

Брус віднесений до прямокутної просторової декартової системи координат XYZ із правою системою осей та початком у точці O . Головна площина симетрії бруса A співпадає із координатною площиною XOZ .

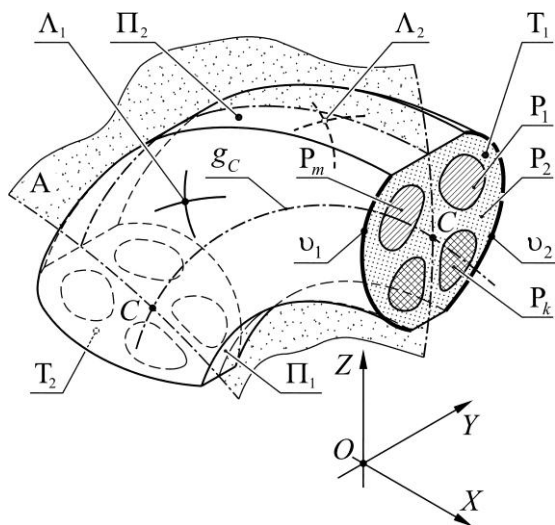


Рис. 1. Схема дискретно-неоднорідного бруса з криволінійною плоскою віссю

Зовнішню поверхню бруса складають бічні криволінійні поверхні Λ_c ($c=1,2$) (рис. 1), із твірними v_c , поздовжні циліндричні поверхні Π_c та торцеві поверхні T_c . Поверхні Π_c та T_c перпендикулярні до площини симетрії бруса A .

Вважатимемо, що у загальному випадку криволінійний брус перебуває під дією системи поверхневих та об'ємних навантажень різної природи.

Розглянемо теоретичні передумови та побудуємо загальний підхід до визначення НДС такого елемента у випадку пружної роботи матеріалів усіх фаз P_k .

У прямокутній просторовій системі координат XYZ , функції, які описують структурну будову та форму розглядуваного бруса, а також його навантаження, у загальному випадку будуть функціями трьох незалежних

змінних, що суттєво ускладнює задачу визначення компонентів НДС, навіть у випадку дискретно-неоднорідних брусів, що мають просту форму та типові навантаження. Спростити аналітичне описання задачі можна обравши, природну для будови розглядуваного криволінійного бруса систему координат [8]. Тому, як основну для отримання теоретичних залежностей між компонентами НДС та описання структурної будови бруса приймемо природну криволінійну циліндричну систему координат HEU .

У природній системі HEU усі поздовжні волокна бруса разом із центральною віссю належать однопараметричному сімейству координатних циліндричних поверхонь Π_ξ^g ($\Pi_\xi \in \Pi_\xi^g$), а поперечні перерізи – однопараметричному сімейству координатних циліндричних поверхонь T_η^f

($T_\xi \in T_\eta^f$). Лінії перетину координатних поверхонь T_η^f та Π_ξ^g із площиною XOZ належать, відповідно, однопараметричним ортогональним сімействам кривих f_η та g_ξ (рис. 2):

$$f_\eta(x, z, \eta) = 0, \quad g_\xi(x, z, \xi) = 0, \quad (1)$$

де η, ξ – довільні дійсні сталі (криволінійні координати).

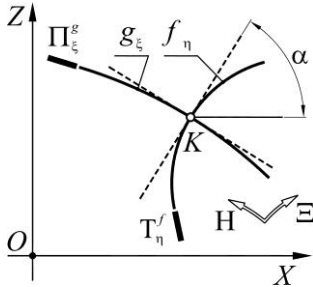


Рис. 2. Сліди координатних поверхонь природної системи на площині XOZ

Розв'язок системи (1) дає зв'язок між координатами довільної точки у системах XYZ та $НΞУ$

$$x = \omega_x(\eta, \xi), \quad z = \omega_z(\eta, \xi). \quad (2)$$

У [8] запропоновано ряд параметрів, які характеризують природну систему координат і дозволяють спростити запис отримуваних аналітичних співвідношень:

$$\kappa = \frac{\partial \omega_z / \partial \xi}{\partial \omega_x / \partial \xi} = - \frac{\partial \omega_x / \partial \eta}{\partial \omega_z / \partial \eta} = \text{tg } \alpha, \quad (3)$$

$$\lambda = - \frac{\partial \omega_z / \partial \xi}{\partial \omega_x / \partial \eta} = \frac{\partial \omega_x / \partial \xi}{\partial \omega_z / \partial \eta},$$

$$L_\eta^* = \text{sgn}(\partial \omega_z / \partial \eta) L_\eta, \quad L_\xi^* = \text{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) L_\xi, \quad (4)$$

де α – кут між дотичною до кривої f_η (нормаллю до g_ξ) у довільній точці та віссю OX (рис. 2); L_η, L_ξ – коефіцієнти Ламе:

$$L_\eta = \sqrt{1 + \kappa^2} |\partial \omega_z / \partial \eta|, \quad L_\xi = \sqrt{1 + \kappa^2} |\partial \omega_x / \partial \xi|. \quad (5)$$

Рівняння теорії пружності та граничні умови, для розглядуваного криволінійного бруса у природній системі координат $НΞУ$ можуть бути побудовані шляхом перетворення відомих рівнянь у прямокутній просторовій XYZ або циліндричній круговій системах координат, які є частинними випадками криволінійної ортогональної системи координат. Далі опишемо основні етапи та ключові моменти такого перетворення.

Рівняння рівноваги. При деформуванні розглядуваного бруса, у загальному випадку навантаження на гранях елемента, виділеного нескінченно близькими координатними поверхнями T_η^f, Π_ξ^g та Y_y системи $НΞУ$, будуть діяти нормальні ($\sigma_\eta, \sigma_\xi, \sigma_y$) та дотичні ($\tau_{\eta\xi}, \tau_{\xi\eta}, \tau_{\eta y}, \tau_{y\eta}, \tau_{\xi y}, \tau_{y\xi}$) компоненти напруженого стану (рис. 3).

Прийнята тут система позначень компонент НДС передбачає, що перша літера у індексі вказує на напрям нормалі до розглядуваної площадки (ділянки координатної поверхні T_η^f, Π_ξ^g або Y_y), а друга – напрям дії відповідної компоненти. Однак у випадку коли обидві літери індексу однакові будемо зазначати лише одну літеру.

Оскільки система координат $НΞУ$ є ортогональною, то для дотичних складових внутрішніх зусиль буде справедливим закон парності: $\tau_{\eta y} = \tau_{y\eta}, \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}, \tau_{\xi y} = \tau_{y\xi}$.

Згідно із співвідношеннями між компонентами тензора другого рангу у прямокутній просторовій та природній криволінійній системах координат, отриманими у [8], між компонентами напруженого стану у системах XYZ та $НΞУ$ мають місце наступні залежності:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{1 + \kappa^2} (\sigma_\xi + \kappa^2 \sigma_\eta - 2\kappa \tau_{\eta\xi}), & \tau_{xz} &= \frac{1}{1 + \kappa^2} (\kappa (\sigma_\xi - \sigma_\eta) + (1 - \kappa^2) \tau_{\eta\xi}), \\ \sigma_z &= \frac{1}{1 + \kappa^2} (\kappa^2 \sigma_\xi + \sigma_\eta + 2\kappa \tau_{\eta\xi}), & \tau_{xy} &= \text{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (\tau_{\xi y} - \kappa \tau_{y\eta}), \\ \sigma_y &= \sigma_y, & \tau_{yz} &= \text{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (\kappa \tau_{\xi y} + \tau_{y\eta}). \end{aligned} \quad (6)$$

Зв'язок між похідними довільної функції трьох змінних $\varphi(x, y, z)$ у системах XYZ та $НΞУ$

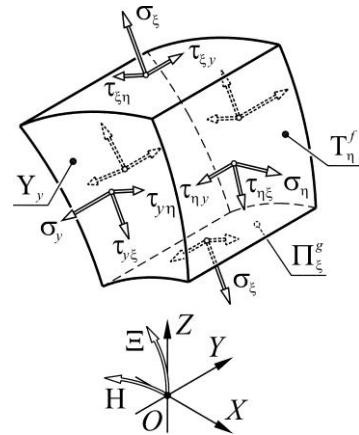


Рис. 3. Елементарний об'єм бруса із компонентами напружень

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(-\frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right), \quad (7)$$

де $|\mathbf{J}|$ – визначник Якобі:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} = -L_\xi^* L_\eta^*. \quad (8)$$

Зв'язок між компонентами об'ємного навантаження, а також сил інерції, у випадку нерівномірного руху бруса, у прямокутній просторовій XYZ та природній криволінійній ΞY системах координат можна виразити, як зв'язок між компонентами вектора. Якщо $\Sigma_x^V, \Sigma_y^V, \Sigma_z^V$ –

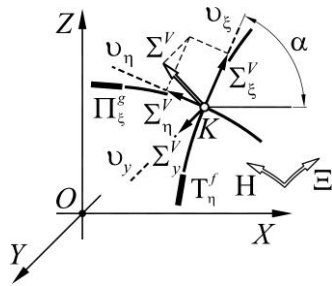


Рис. 4. Компоненти вектора Σ^V у природній криволінійній системі координат

компоненти сумарного навантаження Σ^V від об'ємних сил та сил інерції у прямокутній просторовій системі XYZ , а $\Sigma_\eta^V, \Sigma_\xi^V, \Sigma_\gamma^V$ – компоненти цих сил у природній криволінійній системі ΞY (рис. 4), то зв'язок між ними виражатимуть наступні співвідношення [8]:

$$\Sigma_x^V = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} \right) \frac{\Sigma_\xi^V - \kappa \Sigma_\eta^V}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \quad \Sigma_z^V = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} \right) \frac{\Sigma_\eta^V + \kappa \Sigma_\xi^V}{\sqrt{1 + \kappa^2}}. \quad (9)$$

Проекції об'ємних сил, віднесених до одиниці маси, на нормалі u_η, u_ξ, u_γ до координатних поверхонь $T_\eta^f, \Pi_\xi^g, Y_\gamma$, позначимо, відповідно – $F_\eta^V, F_\xi^V, F_\gamma^V$, а проекції повного переміщення – $\tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}$. Тоді компоненти сумарного об'ємного навантаження у природній системі координат

можна записати наступним чином

$$\Sigma_\eta^V = \mu^\rho \left(F_\eta^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right), \quad \Sigma_\xi^V = \mu^\rho \left(F_\xi^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right), \quad \Sigma_\gamma^V = \mu^\rho \left(F_\gamma^V - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \right), \quad (10)$$

де μ^ρ – функція розподілу густини матеріалів бруса.

Після застосування до статичних рівнянь лінійної теорії пружності у прямокутній просторовій системі координат XYZ послідовно залежностей (2), (7), (8) та (6), і виконання ряду перетворень та перегрупувань з урахуванням (4), отримана наступна система рівнянь

$$\left. \begin{aligned} -\kappa \Psi_1 + \Psi_2 + L_\xi^* \sqrt{1 + \kappa^2} \Sigma_x^V &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\eta\gamma}}{\partial \eta} + L_\xi \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial \tau_{\xi\gamma}}{\partial \xi} + \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\lambda \tau_{\xi\gamma}}{1 + \kappa^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{\tau_{\eta\gamma}}{1 + \kappa^2} + \Sigma_\gamma^V &= 0; \\ \Psi_1 + \kappa \Psi_2 + L_\xi^* \sqrt{1 + \kappa^2} \Sigma_z^V &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

де для спрощення введене позначення

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \lambda \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + L_\xi \frac{\partial \tau_{\eta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{1 + \kappa^2} + \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{2\lambda \tau_{\xi\eta}}{1 + \kappa^2}, \\ \Psi_2 &= \lambda \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + L_\xi \frac{\partial \tau_{\xi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\lambda (\sigma_\xi - \sigma_\eta)}{1 + \kappa^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{2\tau_{\eta\xi}}{1 + \kappa^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Після розв'язку першого та третього рівнянь системи (11) відносно Ψ_1 та Ψ_2 і підстановки (9), (10) та (12), отримаємо наступну систему рівнянь рівноваги

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + L_\xi \frac{\partial \tau_{\eta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{1 + \kappa^2} + \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{2\lambda \tau_{\xi\eta}}{1 + \kappa^2} + L_\xi \mu^\rho \left(F_\eta^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + L_\xi \frac{\partial \tau_{\xi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\lambda (\sigma_\xi - \sigma_\eta)}{1 + \kappa^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{2\tau_{\eta\xi}}{1 + \kappa^2} + L_\xi \mu^\rho \left(F_\xi^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\eta\gamma}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\gamma}}{\partial \xi} + L_\xi \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\lambda \tau_{\xi\gamma}}{1 + \kappa^2} - \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{\tau_{\eta\gamma}}{1 + \kappa^2} + \mu^\rho \left(F_\gamma^V - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Системі (13) можна надати простішого вигляду використавши перше співвідношення (3)

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi \eta}}{\partial \xi} + L_{\xi} \frac{\partial \tau_{\eta y}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) + 2\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tau_{\xi \eta} + L_{\xi} \mu^p \left(F_{\eta}^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\xi \eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + L_{\xi} \frac{\partial \tau_{\xi y}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tau_{\xi \eta} + L_{\xi} \mu^p \left(F_{\xi}^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\eta y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi y}}{\partial \xi} + L_{\xi} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tau_{\xi y} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tau_{\eta y} + \mu^p \left(F_y^V - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Геометричні співвідношення. Отримання системи геометричних співвідношень Коші загалом може бути виконане аналогічно статичним рівнянням, однак у даному випадку необхідно виконати перетворення як компонент деформацій, так і компонент вектора переміщень.

Компоненти повного переміщення довільної точки у системі XYZ позначимо відповідно u, v, w . Тоді співвідношення між переміщеннями у системах координат XYZ та HEY , подібно до (9) матимуть такий вигляд

$$u = \operatorname{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (\tilde{u} - \kappa \tilde{w}), \quad v = \tilde{v}, \quad w = \operatorname{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (\tilde{w} + \kappa \tilde{u}). \quad (15)$$

Компоненти деформованого стану у системі координат HEY позначимо відповідно до компонентів напруженого стану (рис. 3). Лінійні деформації у напрямку нормалей до відповідних граней елемента бруса, позначимо відповідно: $\varepsilon_{\eta}, \varepsilon_{\xi}, \varepsilon_y$. Кутові деформації елемента позначимо відповідно: $\gamma_{\eta \xi}, \gamma_{\xi \eta}, \gamma_{\xi y}, \gamma_{y \xi}, \gamma_{\eta y}, \gamma_{y \eta}$. Оскільки природна система координат є ортогональною, то для кутових деформації справедливими будуть рівності: $\gamma_{\eta y} = \gamma_{y \eta}, \gamma_{\xi y} = \gamma_{y \xi}, \gamma_{\xi \eta} = \gamma_{\eta \xi}$.

Залежності між компонентами деформованого стану у прямокутній просторовій системі XYZ та криволінійній циліндричній HEY , подібно до (6), запишемо у такому вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\eta} &= \frac{1}{1 + \kappa^2} (\kappa^2 \varepsilon_x + \varepsilon_z - \kappa \gamma_{zx}), & \gamma_{\eta \xi} &= \frac{1}{1 + \kappa^2} (2\kappa (\varepsilon_z - \varepsilon_x) + (1 - \kappa^2) \gamma_{zx}), \\ \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{1 + \kappa^2} (\varepsilon_x + \kappa^2 \varepsilon_z + \kappa \gamma_{zx}), & \gamma_{\xi y} &= \operatorname{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (\gamma_{xy} + \kappa \gamma_{yz}), \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y, & \gamma_{y \eta} &= -\operatorname{sgn}(\partial \omega_x / \partial \xi) \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (\kappa \gamma_{xy} - \gamma_{yz}). \end{aligned} \quad (16)$$

Підставивши до співвідношень (16) послідовно геометричні залежності у прямокутній просторовій системі координат XYZ та співвідношення (15), після виконання перетворень отримаємо геометричні співвідношення для природної системи координат HEY

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\eta} &= \frac{\lambda}{L_{\xi}} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{u}}{1 + \kappa^2} \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \right), & \gamma_{\eta \xi} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left(\lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\tilde{w}}{1 + \kappa^2} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \frac{\tilde{u}}{1 + \kappa^2} \right) \right), \\ \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\tilde{w}}{1 + \kappa^2} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \right), & \gamma_{\xi y} &= \frac{1}{L_{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, & \gamma_{y \eta} &= \frac{\lambda}{L_{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (17)$$

Із використанням (3), співвідношення (17) перетворені до такого вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\eta} &= \frac{\lambda}{L_{\xi}} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{u} \right), & \gamma_{\eta \xi} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left(\lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{w} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tilde{u} \right) \right), \\ \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tilde{w} \right), & \gamma_{\xi y} &= \frac{1}{L_{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, & \gamma_{y \eta} &= \frac{\lambda}{L_{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (18)$$

Фізичні залежності. Розглянемо випадок, коли фази P_k бруса володіють властивостями криволінійної циліндричної ортотропії [4] і у довільній точці $K(\eta_K, \xi_K, y_K)$ дві з площин пружної симетрії є дотичними до відповідних координатних поверхонь $T_\eta^f|_{\eta=\eta_K}$ та $\Pi_\xi^g|_{\xi=\xi_K}$, а третя співпадає із площиною $\Upsilon_y|_{y=y_K}$. Тоді пружні властивості кожної із фаз P_k можуть бути описані сукупністю 12-ти пружних сталей: $E_\eta^{[k]}, E_\xi^{[k]}, E_y^{[k]}$ – модулі пружності у напрямках нормалей до координатних поверхонь T_η^f , Π_ξ^g та Υ_y ; $G_{\eta\xi}^{[k]}, G_{\xi y}^{[k]}, G_{y\eta}^{[k]}$ – модулі зсуву у дотичних до координатних поверхонь площинах; $\nu_{\eta\xi}^{[k]}, \nu_{\xi\eta}^{[k]}, \nu_{\xi y}^{[k]}, \nu_{y\xi}^{[k]}, \nu_{\eta y}^{[k]}, \nu_{y\eta}^{[k]}$ – коефіцієнти Пуассона.

Для врахування об'ємних та термічних навантажень до пружних характеристик необхідно додати густину матеріалів фаз – $\rho^{[k]}$ та коефіцієнти лінійного температурного розширення – $\vartheta_\eta^{[k]}, \vartheta_\xi^{[k]}, \vartheta_y^{[k]}$. Таким чином, у випадку дії статичних, динамічних та температурних навантажень, фізико-механічні властивості матеріалу фази P_k , можуть бути описані сукупністю сталей

$$\left\| E_\eta^{[k]}, E_\xi^{[k]}, E_y^{[k]}, G_{\eta\xi}^{[k]}, G_{\xi y}^{[k]}, G_{y\eta}^{[k]}, \nu_{\eta\xi}^{[k]}, \nu_{\xi\eta}^{[k]}, \nu_{\xi y}^{[k]}, \nu_{y\xi}^{[k]}, \nu_{\eta y}^{[k]}, \nu_{y\eta}^{[k]}, \rho^{[k]}, \vartheta_\eta^{[k]}, \vartheta_\xi^{[k]}, \vartheta_y^{[k]} \right\| = \left\| S_a^{[k]} \right\|, \quad (19)$$

де $k=1\dots m$.

Для ідеально-пружного суцільного тіла із 12-ти пружних сталей тільки 9 є незалежними, решта пов'язані співвідношеннями [4]:

$$E_\eta^{[k]} \nu_{\xi\eta}^{[k]} = E_\xi^{[k]} \nu_{\eta\xi}^{[k]}, \quad E_\xi^{[k]} \nu_{y\xi}^{[k]} = E_y^{[k]} \nu_{\xi y}^{[k]}, \quad E_y^{[k]} \nu_{\eta y}^{[k]} = E_\eta^{[k]} \nu_{y\eta}^{[k]}. \quad (20)$$

Нехай у прямокутній системі XYZ задані функціональні залежності, які описують форму поперечних перерізів бруса, його фаз та кожного волокна. Тоді координати деякої точки K дозволяють однозначно встановити її приналежність до відповідної фази P_k композитного бруса, а отже і фізико-механічні властивості матеріалу у даній точці, що задані сукупністю сталей (19). Тому для множини внутрішніх точок композитного бруса можна говорити про однозначну залежність фізико-механічних властивостей матеріалу у точці від її координат x_K, y_K, z_K , тобто має місце функціональна залежність $\mu_a^S = \mu_a^S(x_K, y_K, z_K)$, або з урахуванням (2)

$$\mu_a^S = \mu_a^S(x_K, y_K, z_K) = \mu_a^S(\omega_x(\eta_K, \xi_K), y_K, \omega_x(\eta_K, \xi_K)) = \mu_a^S(\eta_K, \xi_K, y_K). \quad (21)$$

Зважаючи на прийняту незмінність структури поперечного перерізу по довжині бруса, довільне поздовжнє волокно бруса g_{ξ_K} матиме незмінні характеристики по довжині ($\eta_K = \text{const}$) у природній системі $H\Xi Y$, що зменшує кількість незалежних змінних у функціях фізико-механічних характеристик до двох

$$\mu_a^S = \mu_a^S(\xi_K, y_K). \quad (22)$$

Розкриємо загальні підходи до аналітичного описання функції (22). Областю визначення функції (22) є множина P усіх точок бруса, за виключенням границь фаз, де вона є невизначеною. Однорідні фази P_k бруса можна розглядати, як підмножини множини P усіх точок бруса

$$P_k \subset P, \quad \bigcup_{k=1}^m P_k = P,$$

причому $P_k \cap P_j = \emptyset, k \neq j$.

Уведемо характеристичні функції кожної з множин P_k

$$p_k = p_k(g_{\xi_K}) = \begin{cases} 1, & g_{\xi_K} \in P_k, \\ 0, & g_{\xi_K} \notin P_k. \end{cases} \quad (23)$$

Функція (23) визначає приналежність довільної точки K до фази композита. На основі (23) можна записати функції фізико-механічних характеристик окремих фаз бруса

$$\tilde{\mu}_a^{S[k]} = S_a^{[k]} p_k(\xi_K, y_K). \quad (24)$$

Функції (24) набувають значень відповідної характеристики $S_a^{[k]}$ (19) матеріалу k -ї фази, якщо розглядувана точка знаходиться у межах фази, і дорівнює нулю, якщо точка знаходиться поза її межами. Таким чином, вираз (24) визначає фінітну функцію із обмеженим носієм:

$\text{supp } \tilde{\mu}_a^{S[k]} = P_k$, поза межами якого, функція $\tilde{\mu}_a^{S[k]}$ дорівнює нулю, а на границях має розриви 1-го роду і змінюється стрибкоподібно.

Суперпозиція функцій (24) для всіх фаз бруса визначає функцію відповідної фізико-механічної характеристики для всього бруса

$$\mu_a^S = \tilde{\mu}_a^{S[1]} + \tilde{\mu}_a^{S[2]} + \dots + \tilde{\mu}_a^{S[k]} + \dots + \tilde{\mu}_a^{S[m]} = \sum_{k=1}^m \left(S_a^{[k]} p_k(\xi_K, y_K) \right), \text{supp } \mu_a^S = P, \quad (25)$$

яка, в залежності від розташування розглядуваної точки K по відношенню до фаз композита, набуває значень відповідних фізико-механічних характеристик і дорівнює нулю, якщо $K \notin P$.

Таким чином, формування функцій фізико-механічних властивостей (25) композитного бруса потребує аналітичного представлення характеристичних функцій (23) для усіх його фаз. У даній роботі не будемо детально зупинятись на способах представлення даних функцій, однак зазначимо, що функції (23) можуть бути побудовані на основі функції Хевісайда, як, наприклад, це зроблено у [3] для прямих композитних брусів із фазами прямокутної форми.

Компоненти деформованого стану незалежно від обраної системи координат за пружної роботи матеріалів фаз пов'язані лінійною залежністю із відповідними компонентами напруженого стану. Згідно з прийнятою структурною будовою бруса, у природній системі координат НΞУ площини пружної симетрії матеріалів фаз довільного нескінченно малого елемента бруса співпадають із площинами дотичними до відповідних координатних поверхонь $T_\eta^f, \Pi_\xi^g, \Upsilon_y$. Тоді, у системі НΞУ залежності між компонентами напруженого та деформованого станів у довільній точці бруса не будуть, принципово, відрізнятися від відомих співвідношень для ортотропного тіла [4], і з урахуванням наявності температурного поля запишуться так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\eta &= \frac{\sigma_\eta}{\mu_\eta^E} - \frac{\mu_{\xi\eta}^v \sigma_\xi}{\mu_\xi^E} - \frac{\mu_{y\eta}^v \sigma_y}{\mu_y^E} + \mu_\eta^g T, & \gamma_{\eta\xi} &= \frac{1}{\mu_{\eta\xi}^G} \tau_{\eta\xi}, \\ \varepsilon_\xi &= \frac{\sigma_\xi}{\mu_\xi^E} - \frac{\mu_{y\xi}^v \sigma_y}{\mu_y^E} - \frac{\mu_{\eta\xi}^v \sigma_\eta}{\mu_\eta^E} + \mu_\xi^g T, & \gamma_{\xi y} &= \frac{1}{\mu_{\xi y}^G} \tau_{\xi y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{\mu_y^E} - \frac{\mu_{\eta y}^v \sigma_\eta}{\mu_\eta^E} - \frac{\mu_{\xi y}^v \sigma_\xi}{\mu_\xi^E} + \mu_y^g T, & \gamma_{y\eta} &= \frac{1}{\mu_{y\eta}^G} \tau_{y\eta}, \end{aligned} \quad (26)$$

де T – інтенсивність температурного поля у розглядуваній точці.

Необхідно зауважити, що співвідношення (26) передбачають, що величина температури T недостатня для суттєвої зміни пружних сталей матеріалів фаз бруса.

Граничні умови. На поверхні бруса функції напружень, отримані шляхом розв'язання рівнянь (13) або (14), мають відповідати його зовнішньому навантаженню, а функції переміщень – накладеним обмеженням, тобто мають задовольняти відповідно статичні та кінематичні граничні умови. Також, згідно основних принципів механіки при розв'язанні задач деформування кінематичні умови завжди можуть бути замінені еквівалентними, за впливом на деформації бруса, статичними умовами. Тому для розглядуваного бруса далі обмежимося розглядом тільки статичних граничних умов.

У природній системі координат НΞУ, яка відповідає описаним вище умовам, для будь-якого нескінченно малого поверхневого елемента розглядуваного бруса, умови статичної рівноваги запишуться аналогічно відомих співвідношенням:

$$p_\eta = \sigma_\eta l_\eta + \tau_{\eta y} m_y + \tau_{\eta\xi} n_\xi, \quad p_\xi = \tau_{\xi\eta} l_\eta + \tau_{\xi y} m_y + \sigma_\xi n_\xi, \quad p_y = \tau_{y\eta} l_\eta + \sigma_y m_y + \tau_{y\xi} n_\xi, \quad (27)$$

де p_η, p_y, p_ξ – інтенсивності компонентів навантаження, розподіленого по поверхні бруса, що діють в околі розглядуваної точки; l_η, n_ξ, m_y – косинуси кутів між зовнішньою нормаллю поверхні бруса у розглядуваній точці та додатнім напрямом (обраним напрямом зростання параметрів η та ξ) нормалей v_η, v_ξ, v_y координатних поверхонь (рис. 4).

Конкретизуємо граничні умови (27) для поверхонь розглядуваного композитного бруса. Торцеві циліндричні поверхні T_ζ розглядуваного бруса (рис. 1) у природній системі координат НΞУ належать сімейству координатних поверхонь T_η^f , тому напрямні косинуси нормалей у

довільній їх точці дорівнюватимуть: $l_{\eta}^{\Gamma_{\zeta}} = (-1)^{\zeta}$, $n_{\xi}^{\Gamma_{\zeta}} = 0$, $m_y^{\Gamma_{\zeta}} = 0$. Тоді граничні умови (27) для вказаних поверхонь набудуть наступного вигляду:

$$\sigma_{\eta} |_{\eta=\eta_{\zeta}} = (-1)^{\zeta} p_{\eta}^{\Gamma_{\zeta}}, \quad \tau_{\xi\eta} |_{\eta=\eta_{\zeta}} = (-1)^{\zeta} p_{\xi}^{\Gamma_{\zeta}}, \quad \tau_{y\eta} |_{\eta=\eta_{\zeta}} = (-1)^{\zeta} p_y^{\Gamma_{\zeta}}, \quad \zeta = 1, 2. \quad (28)$$

Поздовжні циліндричні поверхні Π_{ζ} у природній системі координат належать сімейству координатних поверхонь Π_{ξ}^g , відповідно напрямні косинуси у будь-якій їх точці дорівнюватимуть: $l_{\eta}^{\Pi_{\zeta}} = 0$, $n_{\xi}^{\Pi_{\zeta}} = (-1)^{\zeta}$, $m_y^{\Pi_{\zeta}} = 0$. Тоді граничні умови на даних поверхнях:

$$\tau_{\eta\xi} |_{\xi=\xi_{\zeta}} = (-1)^{\zeta} p_{\eta}^{\Pi_{\zeta}}, \quad \sigma_{\xi} |_{\xi=\xi_{\zeta}} = (-1)^{\zeta} p_{\xi}^{\Pi_{\zeta}}, \quad \tau_{y\xi} |_{\xi=\xi_{\zeta}} = (-1)^{\zeta} p_y^{\Pi_{\zeta}}. \quad (29)$$

Для поздовжніх бічних граней Λ_1 та Λ_2 (рис. 1) серед напрямних косинусів нулю дорівнюватиме лише l_{η} . Тоді, з урахуванням того, що дані поверхні вільні від навантажень, умови (27) набудуть наступного вигляду:

$$\left(\tau_{\eta y} m_y + \tau_{\eta\xi} n_{\xi} \right) |_{y=v_{\zeta}} = p_{\eta}^{\Lambda_{\zeta}}, \quad \left(\tau_{\xi y} m_y + \sigma_{\xi} n_{\xi} \right) |_{y=v_{\zeta}} = p_{\xi}^{\Lambda_{\zeta}}, \quad \left(\sigma_y m_y + \tau_{y\xi} n_{\xi} \right) |_{y=v_{\zeta}} = p_y^{\Lambda_{\zeta}}. \quad (30)$$

Рівняння (14), (18) та (26) разом із граничними умовами (28)-(30) складають замкнуту систему рівнянь теорії пружності просторової задачі деформування дискретно-неоднорідного композитного бруса із криволінійною плоскою віссю.

Для прямокутних брусів у яких висота поперечного перерізу значно перевищує ширину, а бічні поверхні вільні від навантажень, зміною компонент НДС за координатою у можна знехтувати, що приводить вихідну тривимірну задачу до двовимірної плоскої, якій відповідатимуть наступні рівняння та граничні умови

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) + 2\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tau_{\eta\xi} + L_{\xi} \mu^p \left(F_{\eta}^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) &= 0; \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tau_{\eta\xi} + L_{\xi} \mu^p \left(F_{\xi}^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \left. \begin{aligned} \varepsilon_{\eta} &= \frac{\lambda}{L_{\xi}} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{u} \right); \\ \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tilde{w} \right); \\ \gamma_{\eta\xi} &= \frac{1}{L_{\xi}} \left(\lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{w} \right) + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \tilde{u} \right) \right), \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \varepsilon_{\eta} &= \frac{\sigma_{\eta}}{\mu_{\eta}^E} - \frac{\mu_{\xi\eta}^V \sigma_{\xi}}{\mu_{\xi}^E} + \mu_{\eta}^g T; \\ \varepsilon_{\xi} &= \frac{\sigma_{\xi}}{\mu_{\xi}^E} - \frac{\mu_{\eta\xi}^V \sigma_{\eta}}{\mu_{\eta}^E} + \mu_{\xi}^g T; \\ \gamma_{\eta\xi} &= \frac{1}{\mu_{\eta\xi}^G} \tau_{\eta\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Приклади застосування. За необхідності отримані рівняння просторової та плоскої задач можуть бути конкретизовані під задану форму композитного бруса шляхом визначення параметрів λ , κ і α та коефіцієнтів Ламе L_{η} і L_{ξ} відповідної природної системи координат НЭУ. Наприклад, розглядаючи випадок бруса із прямолінійною віссю для відповідної прямокутної просторової системи координат, згідно з (2)-(5) матимемо: $\omega_x = \xi$, $\omega_z = \eta$, $\alpha = 0$, $\kappa = 0$, $\lambda = 1$, $L_{\xi} = 1$, $L_{\eta} = 1$. Аналогічно, для бруса із круговою віссю, якому відповідає циліндрична кругова система координат, матимемо наступні параметри: $\omega_x = \xi \cos \eta$, $\omega_z = \xi \sin \eta$, $\alpha = \eta$, $\kappa = \operatorname{tg} \eta$, $\lambda = 1/\xi$, $L_{\xi} = 1$, $L_{\eta} = |\xi|$. Такі значення параметрів та коефіцієнтів приводять системи рівнянь (13) та (17) до загальновідомого вигляду, що опосередковано підтверджує правильність отриманих співвідношень.

У випадку бруса із параболічною формою, що утворений сукупністю поздовжніх волокон, які складають сімейство конфокальних парабол із фокусами у початку прямокутної системи координат XYZ , параметри природної системи НЭУ будуть дорівнювати: $\omega_x = \xi \eta$, $\omega_z = \xi^2/2 - \eta^2/2$, $\alpha = \operatorname{arctg}(\xi/\eta)$, $\kappa = \xi/\eta$, $\lambda = -1$, $L_{\eta} = L_{\xi} = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$. Тоді статичні (13) та геометричні (17) рівняння просторової задачі набудуть наступного вигляду

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \xi} + \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \frac{\partial \tau_{\eta y}}{\partial y} + \frac{\eta(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) + 2\xi\tau_{\eta\xi}}{\eta^2 + \xi^2} + \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \mu^p \left(F_{\eta}^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) = 0; \\
 & -\frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \frac{\partial \tau_{\xi y}}{\partial y} + \frac{\xi(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) - 2\eta\tau_{\xi\eta}}{\eta^2 + \xi^2} + \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \mu^p \left(F_{\xi}^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) = 0; \\
 & -\frac{\partial \tau_{y\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{y\xi}}{\partial \xi} + \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\xi\tau_{y\xi} - \eta\tau_{y\eta}}{\eta^2 + \xi^2} + \mu^p \left(F_y^V - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \right) = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\eta \tilde{w}}{\eta^2 + \xi^2} \right); & \gamma_{\xi y} &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}; \\
 \varepsilon_{\eta} &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \left(\frac{\xi \tilde{u}}{\eta^2 + \xi^2} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} \right); & \gamma_{y\eta} &= \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}; \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, & \gamma_{\eta\xi} &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\eta \tilde{u} - \xi \tilde{w}}{\eta^2 + \xi^2} \right).
 \end{aligned} \right\}$$

Аналогічно можуть бути отримані рівняння теорії пружності для брусів з іншою формою осі. Однак більш цікавими є узагальнені розв'язки на основі вихідних систем рівнянь.

Висновок. Таким чином, отримано систему рівнянь просторової ((13), (17), (26)) та плоскої (31) задач теорії пружності для дискретно-неоднорідного композитного бруса із плоскою віссю довільної форми у випадку дії об'ємних, динамічних та температурних навантажень. Дані співвідношення за структурою не залежать від форми криволінійної осі бруса і носять загальний характер та описують залежності між компонентами НДС криволінійного бруса у найбільш простій для аналізу і застосування формі.

Отримані рівняння дозволяють будувати розв'язки задач деформування таких елементів у загальному вигляді, формально охоплюючи усі з можливих форм їх поздовжньої осі, що дозволяє будувати загальні підходи до аналізу та визначення НДС дискретно-неоднорідних криволінійних брусів із довільною будовою поперечних перерізів та формою осі.

Література:

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708с.
2. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / В.Г. Пискунов // Механика композитных материалов. – 2003. – Т.39, №1. – С.2-24.
3. Горик О.В. Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Пискунов, В.М. Череди́ков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416с.
5. Tolf G. Stresses in a Cerved Laminated Beam / G. Tolf // Fiber Sci. Technol. – 1983. – Vol.19, No.4. – P.243-267.
6. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. – 264с.
7. Верещака С.М. Напряженно деформированное состояние анизотропного криволинейного бруса при изгибе с учетом идеального и неидеального контактов между слоями / С.М. Верещака, А.В. Дейнека, О.Н. Орел, А.Г. Хализева // Вісник СумДУ. Серія «Технічні науки». – 2012. – №4. – С.74-87.
8. Ковальчук С.Б. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник ОДАБА. – Одеса: ОДАБА, 2017. – Вип. №68. – С.31-38.

Рецензенти:

Шваб'юк Василь Іванович, професор кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету, доктор технічних наук, професор.

Костенко Олена Михайлівна, професор кафедри «Технології та обладнання переробних і харчових виробництв» Полтавської державної аграрної академії, доктор технічних наук, професор.

Стаття надійшла до редакції 19.04.2018